FUNGSI DISTRIBUSI STATISTIK t_N DALAM SUATU PENYEBARAN INDIVIDU YANG BERATURAN DALAM BENTUK HEXAGON.*

M.A. Djauhari**

SARI

Statistik pengujian keacakan suatu penyebaran individu pada bidang datar selalu didasarkan pada hipotesis awal H_0 bahwa penyebaran individu merupakan suatu realisasi dari suatu proses Poisson. Selanjutnya sebagai hipotesis alternatif biasa dipergunakan;

(i) . H_{11}: penyebaran individu merupakan suatu realisasi dari suatu proses Thomas.
(ii) . H_{12}: penyebaran individu adalah teratur dalam bentuk segitiga-segitiga sama sisi.
(iii) . H_{13}: penyebaran individu adalah teratur dalam bentuk bujursangkar-bujursangkar.

Di sini penulis mengusulkan adanya alternatif H_{14} bahwa penyebaran individu adalah teratur dalam bentuk segienam-segienam sama sisi (hexagon). Selanjutnya di bawah H_{14} akan dibahas distribusi statistik t_N, yakni suatu statistik pengujian keacakan yang mempunyai kuasa yang besar terhadap ketiga alternatif pertama (Djauhari, 1977).

ABSTRACT

In order to determine the index of randomness of a spatial pattern of objects the null hypothesis H_0 that our spatial pattern is a realization of a Poisson's process, is needed. The alternatives usually used, are:

(i) . H_{11}: the spatial pattern is a realization of a Thomas' process.
(ii) . H_{12}: the spatial pattern is regular in the form of equilateral triangles.
(iii) . H_{13}: the spatial pattern is regular in the form of squares.

We propose here the fourth alternative H_{14} that the spatial pattern is regular in the form of hexagons. Our interest here is to study, under H_{14}, the distribution of t_N, i.e. the best test of randomness under the first three alternatives (Djauhari, 1977).

---

* Penelitian ini dilaksanakan di Jurusan Matematika, Institut Teknologi Bandung.

** Jurusan Matematika, Institut Teknologi Bandung.

1. PENDAHULUAN

Pengujian keacakan suatu penyebaran individu pada bidang datar selalu didasarkan pada hipotesis awal H_0 bahwa penyebaran tersebut merupakan suatu realisasi dari suatu proses Poisson. Jika S adalah daerah studi penyebaran individu, sesungguhnya ada tiga kemungkinan bentuk penyebaran.

(i) . Penyebaran individu adalah mengelompok. Dalam hal;

  a). penyebaran kelompok-kelompok individu adalah acak

  b). setiap kelompok mengandung $(N + 1)$ buah individu di mana N adalah peubah acak yang berdistribusi Poisson.

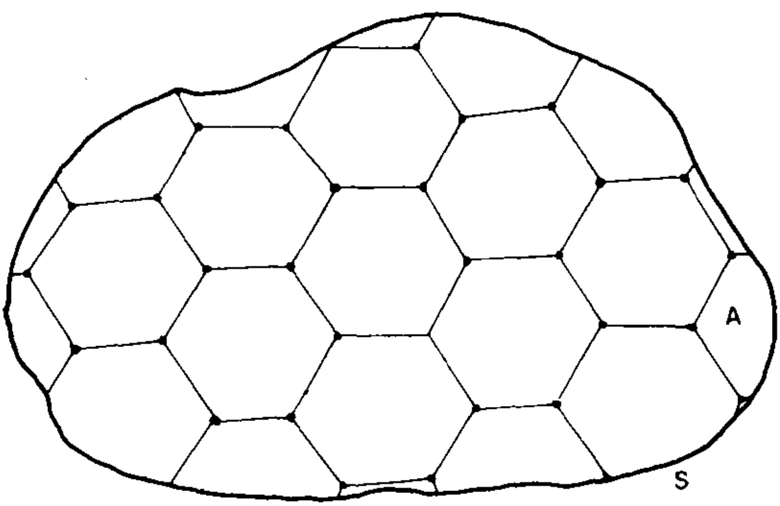
  Maka penyebaran tersebut dikatakan merupakan suatu realisasi dari suatu proses Thomas.

(ii) . Penyebaran individu adalah betul-betul acak, yakni merupakan suatu realisasi dari suatu proses Poisson.

(iii). Penyebaran individu adalah teratur.

Proses Thomas dan penyebaran yang teratur dalam bentuk segitiga-segitiga sama sisi atau bujursangkar-bujursangkar biasa dipergunakan sebagai hipotesis alternatif. Selain bahwa hal ini berguna untuk mengukur kuasa dari suatu statistik pengujian, juga berguna untuk pengambilan keputusan.

Sesungguhnya di samping alternatif-alternatif tersebut, masih mungkin bahwa penyebaran individu adalah teratur dalam bentuk hexagon-hexagon seperti terlihat pada Gambar 1, atau mungkin alternatif-alternatif lainnya. Dalam tulisan ini akan dikemukakan tentang penyebaran yang teratur dalam bentuk hexagon-hexagon.



Gambar 1 Daerah studi S

Dalam literatur-literatur telah banyak dikemukakan [illegible] statistik t_N terhadap alternatif-alternatif di atas (Di[illegible] 1977). Secara umum bentuk daripada statistik t_N adala[illegible]

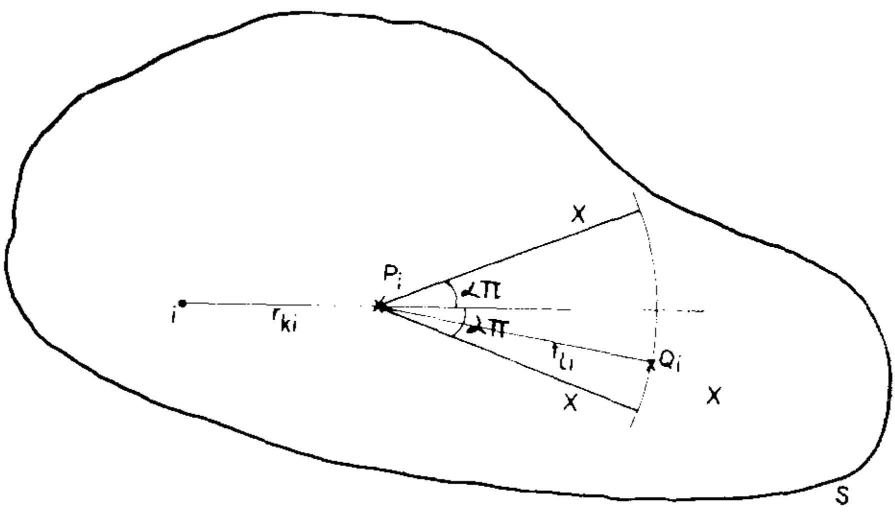
$$t_N = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{r_{ki}^2}{r_{ki}^2 + \alpha t_{li}^2}$$

di mana,

(i) . n adalah ukuran contoh.

(ii) . r_{ki} adalah jarak antara titik acak i dan individu terdekat ke-k dari i yaitu P_i (lihat Gambar 2).

(iii). t_{li} adalah jarak antara P_i dan individu terdekat ke-ℓ, yaitu Q_i, dalam kerucut dengan puncak P_i dan sudut puncak $2\alpha\pi$, $0<\alpha<\frac{1}{2}$, simetris terhadap garis iP_i (lihat Gambar 2).



Gambar 2 Cara pengambilan contoh dalam daerah S

Dalam tulisan ini kita akan membatasi diri untuk $k = 1 = \ell$ dan $\alpha = \frac{1}{2}$. Oleh karena itu, selanjutnya kita tuliskan saja $r_{1i} = r_i$ dan $t_{1i} = t_i$.

Karena statistik t_N di bawah H_{14} adalah fungsi dari r saja, di mana r adalah jarak antara suatu titik yang diambil secara acak dalam S dan individu terdekat di S, maka untuk menentukan fungsi distribusi dari t_N kita tentukan terlebih dahulu fungsi distribusi dari r.

2. FUNGSI DISTRIBUSI DARI r

Misalkan x adalah suatu titik di S yang diambil secara acak dan r adalah jarak dari x ke individu terdekat di S. Untuk mendekati letak permasalahan dari distribusi r di sini dilakukan tiga bentuk penyederhanaan.

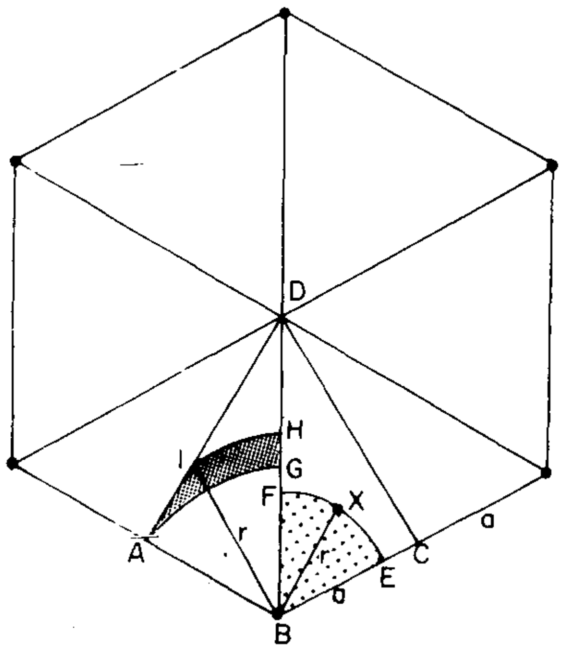
(i) . Setiap individu di S dinyatakan sebagai suatu titik (dalam masalah ekologi, individu sering diartikan sebagai tumbuh-tumbuhan dan S adalah daerah geografis yang dipelajari).

(ii) . Daerah studi S adalah suatu bidang datar.

(iii). Setiap daerah di dalam S yang tidak berupa hexagon, misalnya daerah A pada Gambar 1, dikeluarkan dari daerah studi.

Semua bentuk penyederhanaan di atas tidak akan berakibat fatal jika daerah S cukup luas dibandingkan dengan luas hexagon. Dengan demikian, karena bentuk setiap hexagon adalah sama, maka setiap daerah di dalam suatu hexagon akan mempunyai peluang yang sama untuk menjadi daerah di mana x terambil. Jadi untuk mempelajari fungsi distribusi dari r, cukup dipelajari di dalam sebuah hexagon saja.

Agar supaya individu B (lihat Gambar 3) adalah individu terdekat dari x, haruslah x terletak di dalam daerah ABCD. Selanjutnya jika panjang segmen BC adalah a, dapat ditunjukkan bahwa fungsi distribusi dari r adalah:



Gambar 3 Hexagon dalam daerah studi

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{\pi r^2}{3a^2\sqrt{3}} & ; \quad 0 \leq r \leq a \\[2ex] \dfrac{1}{a^2\sqrt{3}} \left\{ \dfrac{\pi}{3}(r^2 - a^2) - r^2 \arccos \dfrac{a}{r} + a\sqrt{(r^2 - a^2)} \right\} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} & ; \\ a \leq r \leq 2a \end{cases}$$

Bukti dari bentuk fungsi distribusi ini dapat dilaksanakan dengan membandingkan, terhadap luas daerah BCD,
(i) . luas daerah BEF (·:·:·:·:·) untuk $0 \leq r \leq a$
(ii) . luas daerah AGHI (░░░░) untuk $a \leq r \leq 2a$

Tanpa mengurangi makna, dapat kita ambil panjang sisi hexagon sama dengan 1. Dengan demikian, fungsi kepadatan peluang dari r adalah:

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{8\pi r\sqrt{3}}{9} & ; 0 \leq r \leq ½ \\[2ex] \dfrac{8\pi r\sqrt{3}}{9} - \dfrac{8r\sqrt{3}}{3} \arccos \dfrac{1}{2r} & ; ½ \leq r \leq 1 \end{cases}$$

3. FUNGSI DISTRIBUSI DARI t_N

Di bawah H_{14} statistik t_N berbentuk

$$t_N = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i^2}{r_i^2 + ½}$$

di mana r_i adalah jarak antara titik acak hasil pengambilan ke-i dan individu terdekat di S, dan n adalah ukuran contoh.

Distribusi t_N dapat diketahui langsung dari distribusi peubah acak t yang berbentuk:

$$t = \frac{r^2}{r^2 + ½}$$

atau

$$t = \frac{u}{u + ½\pi}$$

di mana u adalah peubah acak yang berupa luas lingkaran berjari-jari r.

(i). Distribusi dari u

Fungsi kepadatan peluang dari u adalah:

$$g(u) = f\left(\left(\frac{u}{\pi}\right)^{1/2}\right) \mid J \mid$$

dengan J adalah Jacobian transformasi $u = \pi r^2$.

Jadi,

$$g(u) = \begin{cases} \dfrac{4\sqrt{3}}{9} & ; 0 \leq u \leq \dfrac{1}{4}\pi \\[2ex] \dfrac{4\sqrt{3}}{9} - \dfrac{4\sqrt{3}}{3\pi} \arccos \sqrt{\left(\dfrac{\pi}{4u}\right)} & ; \dfrac{1}{4}\pi \leq u \leq \pi \end{cases}$$

(ii). Distribusi dari t

Dengan melihat t sebagai fungsi dari u, fungsi kepadatan peluang dari t dengan mudah dapat ditentukan. Fungsi kepadatan peluang tersebut adalah:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9(1-t)^2} & ; 0 \leq t \leq \dfrac{1}{3} \\[2ex] \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9(1-t)^2} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3(1-t)^2} \arccos \sqrt{\dfrac{1-t}{2t}} & ; \dfrac{1}{3} \leq t \leq \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Dengan demikian, jika μ_t dan σ_t^2 masing-masing adalah mean dan variansi dari t, maka dengan mempergunakan aturan Simpson kita peroleh bahwa,

$$\mu_t \approx 0{,}2898$$

$$\sigma_t^2 \approx 2{,}3442$$

Sebagai akibatnya kita peroleh bahwa, jika ukuran contoh n cukup besar, maka t_N mempunyai distribusi pendekatan normal dengan mean sebesar 0,2898 dan variansi sebesar $2{,}3442\ n^{-1}$

DAFTAR PUSTAKA

1. BESAG J.E. dan J.T. GLEAVES (1973). *On the detection of spatial pattern in plant communities*. Bull. Inst. Stat. Inst. 45 (1).
2. DIGGLE P.J., J.E. BESAG dan J.T. GLEAVES (1976). *Statistical analysis of spatial point pattern by means of distance methods*. Biometrika (32).
3. DJAUHARI M.A. (1977). *Modèles et tests de distribution spatiale*. D.E.A., Université de Montpellier II.
4. HOLGATE P. (1965). *Some new tests of randomness*. Journal of Ecology (53).