PROCEEDINGS ITB Vol. 8, No. 2, 1974.

PERLUASAN MENGENAI KOEFISIEN RELIABILITAS DARI KUDER-RICHARDSON (KR-20)

Sunardi Wirjosudirdjo*)

R I N G K A S A N

Konsistensi dari item-item dalam suatu test biasanya diukur dengan menggunakan rumus Kuder-Richardson (KR-20), yaitu:

$$r = \frac{n}{n-1} \frac{s_t^2 - \Sigma pq}{s_t^2} \tag{1}$$

Jelas kiranya bahwa (1) hanya dapat digunakan dalam hal penilaian setiap item 0 atau 1. Apabila nilai setiap itemnya tidak 0 atau 1 saja, maka (1) menjadi:

$$r = \frac{n}{n-1} \frac{s_t^2 - \Sigma s_i^2}{s_t^2} \tag{2}$$

dimana s_i merupakan deviasi standard dari item ke-i.

Selanjutnya, rumus (1) maupun (2) biasanya hanya digunakan dalam hal test direncanakan sedemikian rupa agar item-itemnya di dalam test diharapkan homogin. Apabila item-item di dalam test tidak diarahkan agar homogin, maka kita dapat memberikan bobot pada setiap item sehingga r menjadi maksimum. Ternyata bahwa bobot dari item ke-i, α_i, harus memenuhi sedemikian rupa sehingga α_i s_i merupakan komponen ke-i dari vektor karakteristik yang berkores-

*) Departemen Matematika, Institut Teknologi Bandung.

pondensi dengan harga karakteristik terbesar dari matriks korelasi item-itemnya. Apabila koefisien korelasi antar item semuanya positip, ternyata bahwa α_i adalah positip dan tunggal.

A B S T R A C T

The internal consistency of a test is usually measured by using Kuder-Richardson's formula called KR-20, i.e.

$$r = \frac{n}{n-1} \frac{s_t^2 - \Sigma pq}{s_t^2} \tag{1}$$

It is clear that formula (1) is only applicable to the case where the score of each item is 0 or 1. If the score of each item is not 0 or 1, then (1) can be written as

$$r = \frac{n}{n-1} \frac{s_t^2 - \Sigma s_i^2}{s_t^2} \tag{2}$$

where s_i is the standard deviation of the i^{th} item.

Furthermore, formula (1) or (2) is applicable for the case where the test is designed so that the items in the test intended to be homogeneous. If the items of the test are not intended to be homogeneous, then we can use weighting so that r becomes maximum. It happens that the weight α_i of the i^{th} item should satisfy so that $\alpha_i\ s_i$ is the i^{th} component of the characteristic vector correspond to the greatest eigenvalue of the correlation matrix between items. If the correlation coefficients between item are positive then the α_i's are positive and unique.

I. PENDAHULUAN

Di dalam mengukur internal consistensi dari suatu test, Kuder dan Richardson menciptakan rumus yang dinamakan KR-20. Rumus tersebut adalah

$$r = \frac{n}{n-1} \frac{s_t^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i}{s_t^2} \tag{1}$$

dimana: n = banyaknya item dari test
s_t = deviasi standard dari nilai test
p_i = proporsi yang benar dari item ke-i
$q_i = 1 - p_i$.

Rumus tersebut tentunya dimaksudkan hanya untuk penilaian 1 untuk yang benar dan 0 untuk yang salah pada setiap itemnya. Kemudian yang dimaksudkan dengan nilai test adalah jumlah dari nilai-nilai item.

Dalam hal penilaian tiap item tidak 0 atau 1, kita dapat memperluas rumus tersebut dengan menggantikan $p_i q_i$ dengan variansi dari nilai item ke-i. Apabila s_i menyatakan deviasi standard dari nilai item ke-i, maka rumus KR-20 dapat ditulis sebagai

$$r = \frac{n}{n-1} \frac{s_t^2 - \sum_{i=1}^{n} s_i^2}{s_t^2} \tag{2}$$

Dalam tulisan ini pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $r \leq 1$, sedang $r = 1$ hanya tercapai bila selisih antara dua nilai item konstan atau dapat dikatakan bahwa deviasi standard dari selisih nilai dua item sama dengan 0. Untuk r maksimal ini ($r = 1$), item-item dari testnya dinamakan homogin atau konsisten; setiap mahasiswa dengan nilai tertinggi pada suatu item akan mendapat nilai tertinggi pula pada item-item lainnya yang berarti pula akan mendapat nilai tertinggi pada testnya. Sebagai contoh, misalnya pada suatu test terdapat 20 item, dimana untuk setiap item diberi nilai 0 atau 1. Apabila ternyata $r = 1$ maka akan berarti bahwa hanya ada dua macam nilai test yaitu 0 atau 20.

Disamping itu apabila kita akan menggunakan rumus (1) atau (2) maka item-itemnya direncanakan untuk sama sukarnya, sehingga tidak ada kebebasan untuk kita dalam menyusun item-item untuk suatu test. Selain itu pula, apabila kita menghendaki suatu koefisien reliabilitas yang tinggi maka nilai dari setiap itemnya haruslah sejenis. Misalnya, apabila untuk suatu item diberikan nilai 0, 1, 3 maka untuk item lainnya harus 0 + C, 1 + C, 3 + C dimana C suatu konstanta, misalnya 2, 3, 5 dimana untuk C disini diambil sama dengan 2.

Melihat pada kekhususan cara penilaian yang harus dipenuhi dalam menggunakan rumus (1) maupun (2), maka penulis mempunyai idea untuk memperluas dasar pengertian yang dimaksud oleh rumus (2) tersebut. Idea perluasan tersebut oleh penulis diarahkan pada dua hal, yaitu:

a. dalam hal penilaian tiap-tiap itemnya tidak sejenis
b. dalam hal test terdiri dari item yang tidak sama sukar.

Perluasan tersebut dicerminkan dengan memberikan bobot pada setiap itemnya sedemikian rupa sehingga koefisien reliabilitas r adalah maksimal. Jelas kiranya bahwa dengan pemberian bobot tersebut, tujuan perluasan yang dimaksud dalam b akan dapat dipenuhi. Selanjutnya, bahwa tujuan yang dimaksud dalam a pun dapat dipènuhi dapat dijelaskan dengan menggunakan prinsip korelasi multipel dalam teori statistik asal saja hubungan tersebut kira-kira dapat dianggap linier. Dalam hal tidak dapat dianggap linier, maka biasanya digunakan suatu transformasi.

Di dalam tulisan ini dibahas cara mendapatkan bobot yang dapat memberikan koefisien reliabilitas maksimal. Pembahasan tersebut pertama-tama berkisar pada eksistensi secara matematis dari bobot yang optimal tersebut. Secara matematis, untuk menunjukkan bobot yang optimal tersebut tidak selalu mudah, hal ini disebabkan adanya ketentuan bahwa bobot tersebut tidak boleh negatip. Oleh karena itu, penulis membatasi diri pada pembahasan dimana korelasi antar item-itemnya tidak negatip. Dan ternyata bahwa bobot dapat dipilih non-negatip. Bahwa kita membatasi diri pada korelasi antar item yang non-negatip, sebenarnya bukanlah suatu pembatasan yang mengekang, mengingat bahwa dalam penyusunan suatu test tentunya kita mengusahakan untuk menggunakan item yang memberikan korelasi positip dengan tujuannya.

Disamping itu dalam tulisan ini dibahas pula mengenai bobot yang harus nol. Dari segi penilaian, bobot nol dapat diartikan sebagai tidak mengikut sertakan itemnya.

Selanjutnya penulispun beranggapan bahwa hasil dari pembahasan ini dapat pula diterapkan pada pemberian bobot apabila kita akan menetapkan penilaian suatu mahasiswa dalam rangka studinya, yaitu dengan mengambil course sebagai itemnya.

Perlu pula ditambahkan disini bahwa koefisien reliabilitas r tersebut dapat pula dikaitkan dengan presisi suatu penilaian. Kaitan tersebut dihubungkan dengan standard error (SE) dari nilai sebagai

$$SE = s_t \sqrt{1 - r} \qquad (3)$$

Dalam penilaian, SE tersebut biasanya digunakan sebagai pernyataan besarnya kesalahan atau ketidak-tepatan dalam penilaian (atau kebalikan dari presisi).

II. SIFAT-SIFAT DASAR DARI KOEFISIEN RELIABILITAS

Di dalam membahas koefisien reliabilitas ini penulis akan menggunakan cara statistis, sehingga istilah dan notasinya akan diambil dari teori statistik.

Misalkan $X_1, \ldots, X_n$ adalah variabel random yang nilainya menyatakan nilai item-item dalam suatu test, dimana testnya terdiri dari n item. Rumus (2) dapat ditulis sebagai

$$r = \frac{n}{n-1} \frac{Var(D_n) - \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)}{Var(D_n)} \qquad (4)$$

dimana:

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Var = \text{variansi.}$$

Oleh karena $Var(D_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Cov(X_i, X_j)$ dimana Cov adalah covariansi, maka (4) dapat ditulis sebagai

$$r = \frac{n}{n-1} \frac{2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Cov(X_i, X_j)}{Var(D_n)} \qquad (5)$$

Selanjutnya oleh karena variansi bernilai non-negatip, maka kita mendapat

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Var(X_i - X_j)$$

$$= (n-1)\, Var(D_n) - 2n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

Apabila $Var(D_n) \neq 0$ maka ketidak samaan di atas ekivalen dengan $r \leq 1$. Selanjutnya, $r = 1$ ekivalen dengan $Var(X_i - X_j) = 0$ untuk setiap $i \neq j$ yang ekivalen pula dengan $X_i - X_j = C_{ij}$ dengan kemungkinan satu untuk $i \neq j$ dimana C_{ij} konstanta.

Perlu dicatat disini bahwa:

1. Apabila $Var(X_i) = 0$ untuk setiap i (hal ini biasanya harus dihindarkan), maka $Var(D_n) = 0$. Dalam hal ini kita definisikan $r = 1$.

2. Apabila $\mathrm{Var}(D_n) = 0$ dan $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \neq 0$, maka $r = -\infty$. Hal ini kemungkinan untuk dapat terjadi sangat kecil.
3. Apabila $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ untuk setiap $i \neq j$ dan $\mathrm{Var}(D_n) \neq 0$, maka $r = 0$. Hal ini bisa terjadi apabila variabel-variabel randomnya saling bebas, atau korelasi setiap dua item sama dengan nol.

III. BOBOT UNTUK MEMAKSIMUMKAN KOEFISIEN RELIABILITAS

Misalkan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ adalah bobot untuk n item dalam suatu test, maka

$$r = \frac{n}{n-1} \frac{2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_i \alpha_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_i \alpha_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)} \tag{6}$$

Untuk menyederhanakan, kita tuliskan:

$$Y_k = X_k \, (\mathrm{Var}(X_k))^{-\frac{1}{2}}, \qquad \beta_k = \alpha_k \, (\mathrm{Var}(X_k))^{\frac{1}{2}}$$

dan selanjutnya misalkan $\mathrm{Var}(X_k) \neq 0$ untuk setiap k. Kemudian definisikan matriks $A = (a_{ij})$ sebagai matriks kovariansi dari $Y_1, \ldots, Y_n$. Artinya $a_{ij} = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$. Maka A merupakan matriks n x n yang simetri dan definit non-negatip dengan unsur-unsur diagonalnya sama dengan 1.

Selanjutnya kita tulis β sebagai matriks kolom dengan unsur-unsurnya $\beta_1, \ldots, \beta_n$, atau dapat ditulis sebagai $\beta' = (\beta_1 \ldots \beta_n)$ dimana tanda ' adalah transpose. Maka (6) dapat ditulis sebagai

$$r = \frac{n}{n-1} \frac{\beta' A \beta - \beta' \beta}{\beta' A \beta} \tag{7}$$

Jika kita tulis $\lambda = \frac{\beta' A \beta}{\beta' \beta}$ maka (7) dapat ditulis sebagai

$$r = \frac{n}{n-1} \frac{\lambda - 1}{\lambda} \tag{8}$$

Jelas kiranya bahwa r adalah monoton naik (strict) dalam λ, sehingga memaksimumkan r ekivalen dengan memaksimumkan λ. Juga jelas bahwa

$$0 \leq \lambda \leq n \tag{9}$$

dimana: $\lambda = 0 \Longleftrightarrow r = -\infty$

$\lambda = n \Longleftrightarrow r = 1$.

LEMMA I: Jika $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ harga-harga karakteristik dari matriks A dan $\lambda_k = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$, maka $\max\limits_{\beta} \frac{\beta' A\beta}{\beta'\beta}$ tercapai untuk $\beta = \beta^{(k)}$ dimana $\beta^{(k)}$ adalah vektor karakteristik dari A korespon pada λ_k.

Bukti: Jika $\beta^{(k)}$ vektor karakteristik korespon pada λ_k maka

$$\frac{\beta^{(k)'} A\beta^{(k)}}{\beta^{(k)'}\beta^{(k)}} = \lambda_k$$

Misalkan D matriks diagonal dengan unsur-unsur diagonal $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dan misalkan C matriks ortogonal sehingga $A = C'DC$, maka $\frac{\beta' A\beta}{\beta'\beta} = \frac{(C\beta)'D(C\beta)}{(C\beta)'(C\beta)} \leq \lambda_k$.

Dari ketidak samaan yang terakhir ini jelas kiranya kesimpulan yang tercantum dalam lemma ini.

Jika dalam Lemma I kita ketahui bahwa $\beta^{(k)}$ dapat mencapai maksimum dari $\frac{\beta' A\beta}{\beta'\beta}$, maka dalam lemma berikut kita mendapatkan hal yang sebaliknya, yaitu bila suatu vektor dapat memaksimumkan $\frac{\beta' A\beta}{\beta'\beta}$ maka β harus merupakan vektor karakteristik korespon pada λ_k.

LEMMA II: Jika $\frac{\beta^{*'} A\beta^*}{\beta^{*'}\beta^*} = \max\limits_{\beta} \frac{\beta' A\beta}{\beta'\beta}$ maka β^* adalah vektor karakteristik dengan λ^* sebagai harga karakteristiknya apabila $\lambda^* = \max\limits_{i} \lambda_i$.

Bukti: Oleh karena A simetri maka kita dapat memilih n vektor karakteristik yang saling ortogonal, misalnya $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(n)}$. Selanjutnya misalkan B adalah matriks n x n dengan kolom-kolomnya vektor-vektor karakteristik tersebut. Misalkan $\beta^* = Bp$ maka

$$\frac{\beta^{*\prime}A\beta^*}{\beta^{*\prime}\beta^*} = \frac{(Bp)'A(Bp)}{(Bp)'(Bp)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, (Bp)_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (Bp)_i^2}$$

dan menurut Lemma I, ruas kiri harus sama dengan λ^*.
Dengan demikian maka $(\lambda^* - \lambda_i)(Bp)_i^2 = 0$ untuk setiap i sehingga $\lambda^* = \lambda_i$ atau $(Bp)_i = 0$.
Dengan demikian $ABp = \lambda^*Bp$, sehingga $\beta^* = Bp$ merupakan vektor karakteristik korespon λ^*.

Dari Lemma I dan Lemma II kita dapat menarik kesimpulan bahwa vektor karakteristik yang korespon pada harga karakteristik yang terbesar merupakan syarat yang perlu dan cukup agar $\frac{\beta'A\beta}{\beta'\beta}$ maksimal. Untuk selanjutnya vektor β tersebut akan dinamakan β optimal, dan ditulis dengan β_{opt}. Sedang harga karakteristiknya dinamakan λ optimal dan ditulis dengan λ_{opt}.

Kini kita meningkat pada pembahasan mengenai positipitas dari komponen-komponen β_{opt}. Oleh karena α_i merupakan bobot tentunya nilainya harus non-negatip, yang berarti bahwa β_i harus pula non-negatip. Hal ini ternyata tidak selalu dapat terjamin untuk komponen-komponen β_{opt} dari matriks A. Oleh karena itulah maka pada pasal yang berikut kita membatasi diri dengan mengambil matriks dengan sifat-sifat tertentu, agar komponen-komponen dari β_{opt} dapat diusahakan bernilai non-negatip. Pembatasan untuk matriks A tersebut adalah dengan menganggap unsur-unsurnya non-negatip.

Unsur-unsur matriks A non-negatip adalah ekivalen dengan $Cov(X_i, X_j)$ non-negatip untuk setiap i tidak sama dengan j. Syarat terakhir ini, ekivalen dengan mengatakan bahwa koefisien korelasi untuk setiap pasangan i dan j adalah non-negatip, atau korelasi antar dua item harus non-negatip.

IV. DALAM HAL ANTAR ITEM MEMPUNYAI KOEFISIEN KORELASI NON-NEGATIP

Dalam pasal ini pembahasan dibatasi dalam hal $Cov(X_i, X_j) \geq 0$ untuk setiap i dan j, yang berarti pula bahwa unsur-unsur dari matriks A adalah non-negatip.

LEMMA III: Jika $Cov(X_i,X_j) \geq 0$ untuk setiap i dan j, maka $\lambda_{opt} \geq 1$. Tanda sama ($\lambda_{opt} = 1$) terjadi jika $Cov(X_i,X_j) = 0$ untuk setiap $i \neq j$.

Bukti: Untuk membuktikan bahwa $\lambda_{opt} \geq 1$, cukuplah kalau dapat ditunjukkan bahwa ada β sehingga $\frac{\beta' A\beta}{\beta'\beta} \geq 1$. Untuk β tersebut dapat diambil vektor dengan komponen-komponen semua sama dengan 1.

Selanjutnya, jika $Cov(X_i, X_j) = 0$ untuk setiap $i \neq j$, maka $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$, sehingga $\beta' A\beta = \beta'\beta$ untuk setiap β.

Dari Aljabar Linier telah kita ketahui bahwa apabila β merupakan vektor karakteristik maka $-\beta$ juga vektor karakteristik, dan harga karakteristiknya adalah sama. Lepas dari soal tanda, maka mudah untuk dimengerti bahwa apabila multiplisitas dari λ_{opt} adalah satu, maka vektor karakteristik yang korespon pada λ_{opt} tersebut adalah tunggal. Sedang apabila multiplisitasnya lebih dari satu maka vektor karakteristik yang korespon pada λ_{opt} adalah tak hingga banyaknya.

DALIL I: Jika $Cov(X_i, X_j) \geq 0$ untuk setiap $i \neq j$, maka komponen-komponen dari β_{opt} dapat diambil non-negatip.

Bukti: Andaikata ada komponen dari β_{opt} yang negatip dan positip, maka tanpa menghilangkan keumumannya kita dapat membuat partisi $\beta'_{opt} = (\beta'_1 \; \beta'_2)$ dimana komponen-komponen β_1 non-negatip dan paling sedikit ada satu komponen yang positip. Sedang β_2 mempunyai komponen - komponen yang negatip. Selanjutnya buat pula partisi dari A yang disesuaikan dengan partisi β_{opt} di atas. Misalkan kita dapat menuliskan

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

dimana A_{11} dan A_{22} matriks bujur sangkar dan $A_{12} = A'_{21}$.

Selanjutnya kita mempunyai hal yang berikut

$$\lambda_{opt} = \frac{\beta'_{opt}A\beta_{opt}}{\beta'_{opt}\beta_{opt}} = \frac{\beta'_1A_{11}\beta_1 + \beta'_2A_{22}\beta_2 + 2\beta'_1A_{12}\beta_2}{\beta'_1\beta_1 + \beta'_2\beta_2}$$

$$\leq \frac{\beta'_1A_{11}\beta_1 + \beta'_2A_{22}\beta_2 - 2\beta'_1A_{12}\beta_2}{\beta'_1\beta_1 + \beta'_2\beta_2}$$

Oleh karena ruas kiri harus maksimum, maka tanda tidaksama menjadi tanda sama. Dan selanjutnya dengan menggunakan Lemma II kita dapat mengambil kesimpulan bahwa vektor $(\beta'_1\ -\beta'_2)'$ juga merupakan vektor karakteristik yang optimal, yaitu vektor karakteristik yang korespon pada λ_{opt}. Perhatikan bahwa komponen - komponen dari $(\beta'_1\ -\beta'_2)'$ adalah non-negatip.

Dalam cara pembuktian dalil di atas kita lihat bahwa apabila kita mendapat komponen yang negatip untuk β_{opt}, maka kita dapat menggantikan komponen tersebut dengan harga mutlaknya. Dengan demikian kita akan mendapat vektor dengan komponen-komponen non-negatip, dan vektor yang terakhir inipun merupakan vektor karakteristik korespon pada λ_{opt}.

Setelah kita mengetahui bahwa komponen-komponen dari β_{opt} dapat diambil non-negatip, maka pembahasan selanjutnya adalah menyelidiki bilamana komponen bernilai nol harus/dapat terjadi, dan disamping itu perlu difahami arti dari ke-nol-an tersebut dalam rangka penilaian. Hal ini penting ditinjau oleh karena dengan memberikan nilai 0 pada komponen tersebut, sama saja artinya dengan tidak mengikut sertakan item yang bersangkutan dalam penilaian test secara keseluruhan.

Jika komponen ke-j dari β_{opt} sama dengan nol, maka

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\ \beta_i = 0$$

yang berarti pula bahwa $a_{ji}\ \beta_i = 0$ untuk setiap i.

Misalkan N himpunan bilangan asli yang merupakan indeks dari komponen bernilai nol, atau dapat ditulis sebagai

$$N = \{k \mid 1 \leq k \leq n,\ \beta_k = 0\}$$

dimana β_k adalah komponen ke-k dari β_{opt} yang kita dapat. Ini berarti bahwa $a_{ki}\ \beta_i = 0$ untuk setiap k di N. Dan dengan mudah kita mendapatkan kesimpulan-kesimpulan sebagai berikut:

DALIL II: Misalkan $Cov(X_i, X_j) \geq 0$ untuk setiap $i \neq j$.

a. $\beta_i = 0$ dan $\beta_j \neq 0 \Longrightarrow Cov(X_i, X_j) = 0$.

b. Jika $Cov(X_i, X_j) > 0$ untuk suatu i dan j, maka $\beta_i = 0 \Longleftrightarrow \beta_j = 0$.

Dengan menggunakan Dalil II ini, kita bagi himpunan bilangan asli dari 1 sampai dengan n dalam kelompok-kelompok sebagai berikut:

DEFINISI: Bilangan asli i dan k dinamakan masuk dalam satu kelompok jika ada $i = j_1, j_2, \ldots, j_t = k$, sehingga $Cov(X_{j_s}, X_{j_{s+1}}) > 0$ untuk setiap $s = 1, \ldots, t-1$.

Jelas kiranya bahwa pembagian dalam kelompok-kelompok ini dapat dilakukan secara tunggal, dan tiap dua kelompok yang berbeda adalah terpisah (disjoint).

Misalkan kita mempunyai m kelompok $K_1, \ldots, K_m$. Tanpa menghilangkan keumumannya (dengan penyusunan kembali dari urutan), kita dapat membuat partisi dari matriks A sebagai

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & A_m \end{pmatrix}$$

dimana $A_1, \ldots, A_m$ merupakan matriks simetri yang definit non-negatip.

Dengan menggunakan pengelompokan tersebut kita dapat mengambil kesimpulan-kesimpulan sebagai berikut:

KESIMPULAN-KESIMPULAN

1. Jika β merupakan vektor karakteristik dari A_1 dengan harga karakteristik λ, maka $(\beta'\ 0\ \ldots\ 0)'$ juga merupakan vektor karakteristik dari A dengan harga karakteristik λ. Demikian pula halnya dengan $A_2, \ldots, A_m$.
2. Jika $\lambda_{opt}^{(t)}$ harga karakteristik optimal dari A_t, maka $\max\limits_{1 \le t \le m} \lambda_{opt}^{(t)}$ adalah harga karakteristik optimal dari A.
3. Jika $\beta_{opt}^{(t)}$ vektor karakteristik optimal dari A_t, dan jika $\lambda_{opt}^{(t)} = \lambda_{opt}^{(2)} = \max\limits_{1 \le t \le m} \lambda_{opt}^{(t)}$ maka:

$$\begin{pmatrix} \beta_{opt}^{(1)} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{opt}^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{pmatrix} c_1\ \beta_{opt}^{(1)} \\ c_2\ \beta_{opt}^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

adalah vektor-vektor karakteristik optimal dari A untuk setiap konstanta c_1 dan c_2 yang tidak keduanya nol.
4. Jika kita hanya mempunyai satu kelompok, maka komponen-komponen dari β_{opt} tidak ada yang sama dengan nol, dan komponen-komponennya dapat dipilih positip semuanya. Hal demikian misalnya dapat terjadi apabila unsur-unsur dari A semuanya positip. Tetapi perlu diingat bahwa syarat unsur-unsur dari A semuanya positip bukanlah syarat yang perlu, oleh karena mungkin ada unsur A sama dengan nol, sedang kita hanya mempunyai satu kelompok.
5. Apabila kelompoknya lebih dari satu, maka kita pilih kelompok yang memberikan nilai terbesar pada

$$\frac{n_t}{n_t - 1} \; \frac{\lambda_{opt}^{(t)} - 1}{\lambda_{opt}^{(t)}}$$

apabila n_t banyaknya unsur dari kelompok K_t.

V. LANGKAH-LANGKAH KOMPUTASI

Dari uraian di atas telah kita ketahui bahwa bobot optimal merupakan vektor karakteristik dari A dimana komponen-komponennya diambil yang non-negatip. Oleh karena itu, di dalam menentukan bobot penulis menyarankan langkah-langkah komputasinya sebagai berikut:

1. Pertama-tama menentukan variansi dari setiap item dari data yang ada, yaitu

$$\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N} (x_{it} - \bar{x}_i)^2$$

   dimana N menyatakan banyaknya data, x_{it} nilai item ke-i dari data yang ke-t dan $\bar{x}_i$ nilai rata-rata dari item ke-i. Selanjutnya dihitung covariansi antar item-itemnya, misalnya covariansi dari item ke-i dengan item ke-j adalah

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N} (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt} - \bar{x}_j)$$

2. Kemudian menentukan unsur-unsur dari matriks A, dimana unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah

$$a_{ij} = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\mathrm{Var}(X_i).\mathrm{Var}(X_j)}$$

   Apabila i tidak sama dengan j maka a_{ij} adalah koefisien korelasi dari X_i dengan X_j, sedang $a_{ii} = 1$.
3. Misalkan kita mendapat matriks A dengan unsur-unsurnya non-negatip. Berdasarkan unsur-unsur dari A kita coba untuk meneliti apakah kita harus membuat pengelompokan. Apabila terdapat lebih dari satu kelompok, maka item-itemnya dikelompokkan berdasarkan prinsip pengelompokan seperti yang diuraikan dalam pasal yang lalu. Selanjutnya komputasi dilakukan perkelompok, sehingga komputasi dilakukan untuk tiap sub-matriks dari A.
4. Misalkan kita hanya mempunyai satu kelompok, maka dari Dalil II kita dapat menarik kesimpulan bahwa β_{opt} yang mempunyai komponen-komponen positip adalah tunggal (artinya

hanya ada satu vektor karakteristik yang korespon pada λ_{opt}, yaitu vektor dengan komponen-komponen positip dan vektor karakteristik lainnya yang merupakan kelipatan dari vektor tersebut).

5. Apabila β_{opt} telah didapat maka bobot α adalah

$$\alpha_k = \alpha \frac{\beta_k}{\sqrt{Var(X_k)}}$$

dimana α_k bobot dari item ke-k, sedang β_k adalah komponen ke-k dari β_{opt}.

6. Apabila terdapat lebih dari satu kelompok, maka kita pilih kelompok yang memberikan koefisien reliabilitas yang terbesar.

KEPUSTAKAAN

1. Curtis, C.W. (1968), Linear Algebra, an introduction approach, Allyn and Bacon, Inc., Boston.
2. Remmers, H.H., Cage N.L. and Rummel J.F. (1965), A practical introduction to Measurement and Evaluation, Harper & Row, New York.
3. Sumarso Darmosumarto (1973), The use of standardized test a recommendation to the admissions committee of examiners Bandung Institute of Technology Indonesia, M. Ed. Thesis, Pennsylvania State University.

(Diterima 18 Pebruari 1974)