PROCEEDINGS ITB Vol. 7, No. 4, 1974.

POISSON BRACKET RELATIVISTIK*)

Hans J. Wospakrik**)

R I N G K A S A N

Dalam artikel ini dicoba memperluaskan notasi Poisson Bracket dalam Mekanika Klassik ke dalam ruang-waktu berdimensi empat dari Teori Relativistik Khusus. Formulasi ini, ternyata sangat menarik sekali karena memberikan persamaan-persamaan gerak relativistik muncul secara wajar sebagai konsekwensinya.

A B S T R A C T

Classical Poisson Bracket is extended to the four dimensional space - time formalism in Special Relativity. This formulation gives the relativistic equation of motion appeared directly as its consequenced.

I. Pendahuluan

Artikel ini merupakan suatu review terhadap artikelnya P.A.M. Dirac yang dimuat dalam, Rev. Mod. Phys. <u>21</u>, 3, 329 (1947).

Tujuan utama dari artikel ini adalah memperluaskan notasi Poisson Bracket (PB) dalam Mekanika Klassik yang biasanya didefinisikan terhadap momentum dan koordinat dalam ruang tiga dimensi ke dalam formulasi ruang-waktu berdimensi empat dari Teori Relativitas Khusus dengan memperkenalkan momentum-empat dari momentum-energi yang relativistik dan koordinat - empat dari ruang-waktu.

---

*) Sebuah tinjauan ulang.

**) Departemen Fisika, Institut Teknologi Bandung.

Dalam Bab II diberikan secara singkat suatu resume terhadap PB ini dalam Mekanika Klassik, yang untuknya diberikan notasi $[F,G]_3$.

Perluasannya ke dalam ruang-waktu berdimensi empat diberikan dalam Bab III dengan notasi $[F,G]_4$.

Formulasi ini ternyata sangat menarik sekali, karena memberikan persamaan-persamaan gerak Hamilton dan persamaan gerak untuk suatu variabel dinamika muncul secara wajar sebagai konsekwensinya.

II. Resume terhadap Poisson Bracket klassik

Formulasi dasar dari Poisson Bracket diperkenalkan melalui suatu transformasi kanonik dalam Mekanika Klassik dan untuk ini pembaca dipersilahkan mengadakan referensi ke Literatur 2, halaman 220 dan Literatur 3, halaman 247. Resume berikut ini diberikan secara langsung dari Persamaan gerak Hamilton Klassik.

Fungsi Hamilton H yang menyatakan energi total dari suatu sistim dinamika yang terdiri dari n-bendatitik-bendatitik, diberikan oleh,

$$H = p_s \dot{x}^s - L, \qquad s = 1, 2, \ldots, 3n \tag{II.1}$$

dimana $L = L(x^s, \dot{x}^s, t)$ adalah fungsi Lagrange, x^s dan p^s adalah koordinat dan momentum yang masing-masing didefinisikan dalam ruang tiga dimensi. Tanda menyatakan turunan eksak terhadap waktu t dan telah dipergunakan di atas notasi indeks dummy yang menyatakan bahwa munculnya indeks kembar dalam suatu perkalian menyatakan penjumlahan terhadapnya.

Dengan demikian ternyata bahwa fungsi Hamilton adalah merupakan suatu fungsi $H(x^s, p^s, t)$.

Bentuk persamaan gerak Hamilton adalah, didefinisikan langsung dari (II.1) sebagai,

$$\dot{x}^s = \frac{\partial H}{\partial p^s}, \quad \dot{p}^s = -\frac{\partial H}{\partial x^s} \tag{II.2}$$

Bila F adalah suatu variabel dinamika, maka persamaan geraknya adalah,

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial x^s}\dot{x}^s + \frac{\partial F}{\partial p^s}\dot{p}^s + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{II.3}$$

dengan mempergunakan (II.1), maka ia berubah menjadi,

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial x^s}\frac{\partial H}{\partial p^s} - \frac{\partial F}{\partial p^s}\frac{\partial H}{\partial x^s} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$= [F,H] + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad \text{(II.4)}$$

notasi [F,H] adalah Poisson Bracket yang dimaksud, yang secara umum didefinisikan sebagai,

$$[F,G] = \frac{\partial F}{\partial x^s}\frac{\partial G}{\partial p^s} - \frac{\partial F}{\partial p^s}\frac{\partial G}{\partial x^s} \qquad \text{(II.5)}$$

Beberapa sipat-sipat aljabar yang dimilikinya dapat diperoleh melalui differensiasi yang sederhana diberikan di bawah ini,

$$[x^s,x^r] = [p^s,p^r] = 0$$
$$[x^s,p^r] = -[p^s,x^r] = \delta^{rs} = \begin{cases} = 0, & r \neq s \\ = 1, & r = s \end{cases} \qquad \text{(II.6a)}$$

dan

$$[F,F] = 0$$
$$[F,c] = 0 \text{ bila c adalah suatu konstanta} \qquad \text{(II.6b)}$$

Bila F dalam (II.4) adalah masing-masing x^s dan p^s maka diperoleh persamaan gerak Hamilton yang dituliskan di dalam notasi Poisson Bracket sebagai,

$$\dot{x}^s = [x^s,H] = \frac{\partial H}{\partial p^s}; \quad \dot{p}^s = [p^s,H] = -\frac{\partial H}{\partial x^s} \qquad \text{(II.7)}$$

dan bila F adalah H sendiri, maka diperoleh

$$\dot{H} = [H,H] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \text{(II.8)}$$

karena [H,H] = 0.

Poisson Bracket yang didefinisikan di atas dalam koordinat dan momentum dalam ruang tiga dimensi, selanjutnya diberikan notasi $[F,G]_3$.

III. Perluasan Poisson Bracket ke dalam ruang-waktu berdimensi empat

Bahasan selanjutnya ini bertujuan memperluaskan $[F,G]_3$ ke dalam ruang-waktu empat dimensi dalam Teori Relativitas Khusus. Dalam Mekanika Relativistik ditunjukkan bahwa perluasan dari momentum ruang yang biasa ke dalam momentum empat dalam ruang-waktu berdimensi empat ini, memberikan komponen keempatnya sebagai energi total dari sistim. Formulasi ini diberikan dalam Literatur 1, halaman 100 dan Literatur 4, halaman 210 dan 224.

Secara kwantitatip, koordinat - koordinat ini dituliskan sebagai,

$$x^{\mu} = (x^{o} = ct,\ x^{s}) \tag{III.1}$$

dan momentum,

$$p^{\mu} = (p^{o} = \frac{H}{c},\ p^{s}) \tag{III.2}$$

dimana $H = H(x^{\mu}, p^{s})$ adalah Hamilton relativistik dan p^{s} adalah momentum relativistik.

$$[F,G] = \frac{\partial F}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial G}{\partial p^{\mu}} - \frac{\partial F}{\partial p^{\mu}}\frac{\partial G}{\partial x^{\mu}},\quad \mu = o,s \tag{III.3}$$

dengan notasi $[F,G]_4$, dan dikenal sebagai Poisson Bracket relativistik.

Secara matematis, dianggap bahwa setiap x^{μ} dan p^{μ} adalah tak bergantungan satu sama lainnya. Jadi dipenuhinya pula sipat-sipat aljabar dalam Bab II, yakni

$$[x^{\mu}, x^{\nu}]_4 = [p^{\mu}, p^{\nu}]_4 = 0$$

$$[x^{\mu}, p^{\nu}]_4 = -[p^{\mu}, x^{\nu}]_4 = \delta^{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \mu\neq\nu \\ 1, & \mu=\nu \end{cases} \tag{III.4a}$$

dan

$$[F,F]_4 = 0$$

$$[F,c]_4 = 0 \text{ bila c adalah konstan} \tag{III.4b}$$

IV. Persamaan gerak relativistik dalam Poisson Bracket relativistik dan konsistensi-cheknya

Persamaan gerak Hamilton relativistik diperoleh dengan mengevaluasi Poisson Bracket relativistik dari x^s dan p^s dengan p^o dan mengingat bahwa x^s adalah tak bergantungan terhadap p^s dan bahwa baik x^s maupun p^s kedua-duanya adalah bukan fungsi explisit dari x^o.

Sebelumnya, perlu dibuktikan terlebih dahulu akan pernyataan berikut: Bila $F = F(x^\mu, p^s)$ adalah suatu variabel dinamika, maka

$$\frac{\partial F}{\partial p^o}\frac{\partial p^o}{\partial x^o} = \frac{dF}{dx^o} \tag{IV.1}$$

Buktinya adalah sebagai berikut,

$\frac{\partial F}{\partial p^o}\frac{\partial p^o}{\partial x^o} = \frac{\partial F}{\partial p^o}\frac{dp^o}{dx^o}$ karena $\frac{\partial p^o}{\partial x^o} = \frac{dp^o}{dx^o}$ (lihat Literatur 4, halaman 224) maka

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial p^o}\frac{dp^o}{dx^o} &= \frac{\partial F}{\partial p^o}\left(\frac{\partial p^o}{\partial x^s}\frac{dx^s}{dx^o} + \frac{\partial p^o}{\partial p^s}\frac{dp^s}{dx^o} + \frac{\partial p^o}{\partial x^o}\right)\\ &= \frac{\partial F}{\partial x^s}\frac{dx^s}{dx^o} + \frac{\partial F}{\partial p^s}\frac{dp^s}{dx^o} + \frac{\partial F}{\partial x^o}\\ &= \frac{dF}{dx^o}\end{aligned}$$

terbukti.

Jadi persamaan gerak Hamilton untuk koordinat ruang x^s, adalah

$$\begin{aligned}[x^s, p^o]_4 &= \frac{\partial x^s}{\partial x^s}\frac{\partial p^o}{\partial p^s} + \frac{\partial x^s}{\partial x^o}\frac{\partial p^o}{\partial p^o} - \frac{\partial x^s}{\partial p^s}\frac{\partial p^o}{\partial x^s} - \frac{\partial x^s}{\partial p^o}\frac{\partial p^o}{\partial x^o}\\ &= \frac{\partial p^o}{\partial p^s} - \frac{dx^s}{dx^o} && \text{menurut (IV.1)}\\ &= 0 && \text{menurut (III.4)}\end{aligned}$$

memberikan,

$$\frac{dp^s}{dx^o} = - \frac{\partial p^o}{\partial x^s} \text{ atau } \dot{p}^s = - \frac{\partial H}{\partial x^s} \qquad \text{(IV.3)}$$

yang mana mirip pula dengan persamaan gerak Hamilton non-relativistik untuk p^s yang didefinisikan dalam (II.3).

Selanjutnya, kita membuktikan pula pernyataan berikut: Bila $F = F(x^\mu, p^s)$ adalah suatu variabel dinamika maka

$$[F, p^o]_4 = 0 \qquad \text{(IV.4)}$$

Ini dibuktikan sebagai berikut,

$$[F, p^o]_4 = \frac{\partial F}{\partial x^s}\frac{\partial p^o}{\partial p^s} + \frac{\partial F}{\partial x^o}\frac{\partial p^o}{\partial p^o} - \frac{\partial F}{\partial p^s}\frac{\partial p^o}{\partial x^s} - \frac{\partial F}{\partial p^o}\frac{\partial p^o}{\partial x^o}$$

menurut (IV.1), (IV.2) dan (IV.3) ruas kanan berubah menjadi

$$\frac{\partial F}{\partial x^s}\frac{dx^s}{dx^o} + \frac{\partial F}{\partial x^o} + \frac{\partial F}{\partial p^s}\frac{dp^s}{dx^o} - \frac{dF}{dx^o}$$

tetapi

$$\frac{dF}{dx^o} = \frac{\partial F}{\partial x^s}\frac{dx^s}{dx^o} + \frac{\partial F}{\partial p^s}\frac{dp^s}{dx^o} + \frac{\partial F}{\partial x^o}$$

dengan demikian pernyataan di atas terbukti.

Dengan mempergunakan (IV.4), maka persamaan gerak relativistik untuk suatu variabel dinamika F, yang didefinisikan dalam (II.4) dalam bentuk non-relativistiknya, adalah

$$[F, p^o]_4 = \frac{\partial F}{\partial x^s}\frac{\partial p^o}{\partial p^s} + \frac{\partial F}{\partial x^o}\frac{\partial p^o}{\partial p^o} - \frac{\partial F}{\partial p^s}\frac{\partial p^o}{\partial x^s} - \frac{\partial F}{\partial p^o}\frac{\partial p^o}{\partial x^o}$$

$$= [F, p^o]_3 + \frac{\partial F}{\partial x^o} - \frac{dF}{dx^o} \qquad \text{menurut (IV.1)}$$

$$= 0 \qquad \text{menurut (IV.4)}$$

memberikan,

$$\frac{dF}{dx^o} = [F,\ p^o]_3 + \frac{\partial F}{\partial x^o} \text{ atau } \dot{F} = [F,\ H]_3 + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad \text{(IV.5)}$$

yang mana menunjukkan kemiripannya.

Bila F adalah p^o sendiri, maka

$$[p^o,\ p^o]_4 = \frac{\partial p^o}{\partial x^s}\frac{\partial p^o}{\partial p^s} + \frac{\partial p^o}{\partial x^o}\frac{\partial p^o}{\partial p^o} - \frac{\partial p^o}{\partial p^s}\frac{\partial p^s}{\partial x^s} - \frac{\partial p^o}{\partial p^o}\frac{\partial p^o}{\partial x^o}$$

$$= \frac{\partial p^o}{\partial x^o} - \frac{\partial p^o}{\partial p^o}\frac{\partial p^o}{\partial x^o} = 0 \qquad \text{menurut (III.5)}$$

menurut (IV.1), $\frac{\partial p^o}{\partial p^o}\frac{\partial p^o}{\partial x^o} = \frac{dp^o}{dx^o}$, memberikan

$$\frac{dp^o}{dx^o} = \frac{\partial p^o}{\partial x^o} \text{ atau } \dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \text{(IV.6)}$$

yang mana mirip pula dengan bentuk non-relativistik (II.7).

V. Bahasan dan Kesimpulan

Perkataan Poisson Bracket relativistik bukannya berarti ia adalah suatu bentuk yang covariant dalam Teori Relativitas Khusus. Dikatakan relativistik, karena ia memberikan bentuk persamaan-persamaan gerak relativistik yang sesuai. Komentar serupa pula diberikan kepada perkataan Hamilton relativistik dalam Bab III dan Bab IV. Formulasi covariant dari Hamilton telah diturunkan dalam Literatur 1, halaman 2 dan Literatur 4, halaman 223.

Kesamaan atara persamaan-persamaan gerak dalam Bab II dan Bab III adalah tidak eksak karena Hamilton dan momentum dalam Bab IV adalah relativistik. Kesamaannya akan kelihatan bila dituliskan Hamilton relativistik ini sebagai $H = H' + mc^2$, dimana H' teredusir menjadi Hamilton non-relativistik dalam Bab II bila kecepatannya adalah kecil sekali dibandingkan terhadap kecepatan cahaya, $v \ll c$.

Akhirnya, disimpulkan bahwa adalah sangat ekonomis sekali, untuk menyatakan suatu persamaan gerak relativistik dalam notasi Poisson Bracket relativistik ini, karena semuanya telah terdapat di dalam notasi yang indah ini.

Perlu ditambahkan pula disini bahwa, artikel ini barulah merupakan suatu konsistensi check dari pada formulasi notasi Poisson Bracket relativistik untuk persamaan gerak relativistik. Untuk pemakaiannya dalam menformulasikan suatu bentuk dinamika relativistik yang lebih luas dalam fisisnya, pembaca dipersilahkan membaca artikel yang cukup menarik dari pionir Mekanika Kwantum relativistik kenamaan P.A.M. Dirac, dalam Rev. Mod. Phys. 21, 3, 329 (1947).

Ucapan terima kasih

Penulis sangat berterima kasih kepada para reviewer Proceedings ITB yang telah menunjukkan akan kesamaan formulas 1 Poisson Bracket relativistik di atas dengan yang terdapat dalam artikelnya Dirac yang lebih luas, dan pula atas kesediaannya untuk memuatkan kembali artikel ini sebagai suatu review terhadapnya.

Literatur

1. Bergmann P.G.: Introduction to the Theory of Relativity, Japan Publ. Trad. Co., Ltd. (1960).

2. Corbean H.C. and Stehle Philip: Classical Mechanics, Topan Print., Ltd. (2nd ed.).

3. Dirac P.A.M.: Form of Rélativistic Dynamics, Rev. Mod. Phys. 21, 3, 392 (1947).

4. Goldstein H.: Classical Mechanics, Japan Publ. Trad. Co., Ltd. (1962).

(Diterima 9 Oktober 1973)

PROCEEDINGS ITB - VOLUME 7

ISI - CONTENTS