PROCEEDINGS VOL. 6, No. 2, 1971.

PRODUK LANGSUNG LENGKAP DARI GRUP

Oleh: K. Kromodihardjo *)

(Diterima 1 Djuni 1971).

RINGKASAN.

Djika $\Gamma = \{G_i\}$ *sebuah himpunan (koleksi) jang hingga dari grup, produk kartesisnja dapat dibuat mendjadi sebuah grup dengan tjara jang sangat eviden. Grup tersebut dinamakan produk langsung dari grup²* G_i, *atau produk langsung luar.*

Disamping produk langsung luar daripada grup dikenal pula konsep produk langsung dalam daripada subgrup dari sebuah grup. Untuk sebuah koleksi jang hingga, produk langsung dalamnja isomorf dengan produk langsung luarnja.

Untuk suatu koleksi jang tak-hingga terhitung dari grup, produk langsungnja masih bisa dibangun melalui produk kartesisnja. Tidak benar lagi bahwa untuk suatu koleksi tak-hingga dari subgrup², produk langsung dalamnja isomorf dengan produk langsung luarnja.

Maksud dari tulisan ini ialah menguraikan bagaimana konsep produk langsung bisa diperluas untuk koleksi sebarang, jang kemudian dinamakan PRODUK LANGSUNG LENGKAP, dan merupakan konsep jang umum dari suatu koleksi grup.

Pada achir tulisan ini, diberikan beberapa tjontoh mengenai PLL dari suatu koleksi grup jang berindexkan kumpulan jang takterhitung, dan untuk mudahnja dalam setiap tjontoh index setnja diambil kumpulan bilangan riil.

ABSTRACT

Let $\Gamma = \{G_i\}$ *be a countable collection of groups. Then its cartesian product can be made into a group in a very obvious way. This new group is called the external direct product of the groups* G_i *from the collection* Γ.

On the other hand we have the internal direct product of subgroups of a group. For a finite collection the internal direct product of subgroups is isomorphic with the external direct product. It is no longer true when the collection is infinite, even countable.

For an infinite collection of groups the direct product must be defined in another way. The main purpose of this paper is to give a general concept of the direct product of an arbitrary collection of groups, which is called THE COMPLETE DIRECT PRODUCT OF GROUPS.

*) Bagian Matematika Institut Teknologi Bandung.

PENDAHULUAN.

0.1. Produk Langsung Luar dari Grup.

Djika A dan B dua buah grup (tak perlu keduanja berlainan), maka produk kartesisnja jaitu kumpulan $A \times B$ dapat dibangun mendjadi sebuah grup dengan mendefinisikan suatu operasi jang sangat eviden didalamnja, jaitu sbb.:

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd)$$

Grup jang terdjadi ini dinamakan Produk Langsung Luar dari grup A dan B, dan dinjatakan dengan notasi: $A \underset{Lr}{\times} B$

Grup ini isomorf dengan grup $B \underset{Lr}{\times} A$

Demikian pula untuk sedjumlah koleksi hingga grup² $G_1, G_2, \ldots\ldots G$ dapat didefinisikan dengan djalan jang serupa, apa jang dinamakan produk langsung luarnja. Jaitu dari produk kartesisnja. Grup jang terdjadi dituliskan sebagai:

$$G = \underset{i=i}{\overset{m}{\pi}} \underset{Lr}{\times} G_i$$

Walaupun grup jang terdjadi ber-beda² bila urutan faktor²nja berbeda, namun kesemuanja isomorf. Kemudian hal ini bisa dilandjutkan sampai suatu koleksi tak-hingga jang masih terhitung.

Misalkan $\Gamma = \{ G_i \}_{i \in N}$ suatu koleksi terhitung dari grup. (N adalah kumpulan semua bilangan asli)

Untuk tahap pertama kita misalkan semuanja berbeda.
Kita pandang sekarang kumpulan $G = G_1 \times G_2 \times \ldots\ldots \times G_i \times \ldots\ldots$ jang unsur²nja terdiri dari barisan²:

$$x = (g_1, g_2, g, \ldots\ldots\ldots) \text{ dengan } g_i \in G_i \text{ untuk setiap i.}$$

Kemudian kita definisikan sebuah operasi dalam G sbb.:

$$\text{bila } x = (g_1, g_2, \ldots\ldots) \text{ dan}$$
$$x' = (g'_1, g'_2 \ldots\ldots) \text{ maka}$$
$$xx' = (g_1 g'_1, g_2 g'_2, \ldots\ldots)$$

Maka G mendjadi sebuah grup dan disebut produk langsung luar dari grup² $G_1, G_2, \ldots\ldots\ldots$ serta dituliskan sebagai:

$$G = \underset{i}{\pi} \underset{Lr}{\times} G_i$$

Sedangkan masing² G_i disebut faktor langsung dari G.

Bila diantara faktor langsungnja terdapat grup jang sama, maka konsep ini akan lebih mudah diterangkan bila kita memakai pengertian kumpulan berindeks. Seperti diketahui definisi kumpulan berindeks adalah seperti dibawah ini.

Definisi 0.1.1: Sebuah kumpulan K dikatakan berindekskan kumpulan Λ djika dapat didefinisikan suatu pemetaan
$f : \Lambda \rightarrow K$ jang surdjektif.

Sebagai tjontoh, sebuah barisan ialah suatu kumpulan jang berindekskan kumpulan N, jaitu kumpulan semua bilangan asli.

Selandjutnja misalkan Γ sebuah koleksi grup jang berindekskan N. Dalam hal ini maka Γ adalah sebuah barisan jang dapat dituliskan sbb.:

$$\Gamma = (G_1, G_2, G_3 \ldots\ldots, G_i, \ldots\ldots\ldots)$$

Dimana boleh terdjadi suku jang sama pada indeks jang berlainan. Maka unsur² dari produk langsung luarnja berbentuk:

$$(g_1, g_2, \ldots\ldots, g_i, \ldots\ldots) \text{ dengan } g_i \in G_i \text{ untuk setiap } i.$$

Dalam fatsal 2 akan diuraikan bagaimana kita membentuk produk kumpulan dari suatu koleksi sebarang dari grup, dan bagaimana membangunnja mendjadi sebuah grup jang disebut Produk Langsung Lengkap.

0.2. Produk Langsung Dalam dari subgrup.

Definisi 0.2.1 : Sebuah grup G disebut produk langsung dalam dari subgrup² G_α, dimana $\Gamma = \{G_\alpha\}$ suatu koleksi subgrup dari G djika:

(i) Untuk setiap α, subgrup G_α invarian

(ii) $G = \left[\bigcup_{\alpha} G_\alpha\right]$

(iii) $G_\alpha \cap \left[\bigcup_{\beta \neq \alpha} G_\beta\right] = \{e\}$

Ditulis dengan notasi:

$$G = \underset{\alpha\ \mathrm{Dlm}}{\pi \times} G_\alpha$$

Untuk suatu koleksi hingga dituliskan $G = \underset{i=1\ \mathrm{Dlm}}{\overset{n}{\pi} \times} G_i$

Dan chusus untuk dua subgrup dituliskan $G = A \underset{\mathrm{Dlm}}{\times} B$

Teorema² jang terkenal mengenai Produk Langsung Dalam antara lain:

Teorema 0.2.1: Djika $G = A \underset{\mathrm{Dlm}}{\times} B$ maka $G/A \cong B$ dan $G/B \cong A$

Teorema 0.2.1.a: Djika $G = \underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} \times_{Dlm} G_i$, maka untuk setiap j berlaku:

$$G_j \cong G / \underset{\substack{i=1 \\ i \neq j}}{\overset{n-1}{\pi}} \times_{Dlm} G_i$$

1. HUBUNGAN ANTARA PRODUK LANGSUNG LUAR DAN PRODUK LANGSUNG DALAM

Teorema jang penting jang menjatakan hubungan antara produk langsung luar dan produk langsung dalam dari suatu koleksi subgrup suatu grup adalah teorema² berikut.

Teorema 1.1.: Djika $\{G_i\}$ sebuah koleksi hingga dari subgrup² dari suatu grup G dan $G = \underset{i}{\pi} \times_{Dlm} G_i$, maka $G \cong \underset{i}{\pi} \times_{Lr} G_i$

Teorema 1.2.: Djika $\{G_i\}$ suatu koleksi hingga dari grup, dan $G = \underset{i}{\pi} \times_{Lr} G_i$, maka untuk setiap i, terdapat subgrup $\overline{G}_i$ dari G sehingga:

(i) $G_i \cong \overline{G}_i$

(ii) $G = \underset{i}{\pi} \times_{Dlm} \overline{G}_i$

Untuk suatu koleksi jang takhingga kedua teorema tersebut tidak benar lagi, ketjuali bagian pertama dari teorema 1.2. Namun masih ada hubungan antara $\underset{i}{\pi} \times_{Dlm} G_i$ dengan suatu subgrup dari $\underset{i}{\pi} \times_{Lr} G_i$, jang akan dibahas dalam fatsal 2.

2. PRODUK LANGSUNG LENGKAP DARI GRUP.

Misalkan $\Gamma = \{G\alpha\}$ sebuah koleksi grup jang berindekskan suatu kumpulan $\wedge$. Ini berarti bahwa terdapat suatu pemetaan $g: \wedge \rightarrow \Gamma$ jang surdjektif. Untuk mudahnja kita tuliskan $g(\alpha) = G\alpha$ untuk setiap α.
Kemudian kita perhatikan kumpulan² berikut:

$$\overline{\Phi} = \{f \mid f : \wedge \rightarrow \underset{\alpha}{U}\, G\alpha\}$$

$$\Phi = \{f \mid f \,E\, \overline{\Phi},\ f(\alpha) \,E\, G\alpha \text{ untuk setiap } \alpha\}$$

$$\underline{\Phi} = \{f \mid f \,E\, \Phi,\ f(\alpha) = e_{G_\alpha}, \text{ ketjuali sedjumlah terhitung}\}$$

$$\Phi_{Lem} = \{f \mid f \,E\, \Phi,\ f(\alpha) = e_{G_\alpha}, \text{ ketjuali sedjumlah hingga}\}$$

Kumpulan Φ dinamakan produk kumpulan dari Γ jang berindekskan $\wedge$. Akan kita buat Φ mendjadi sebuah sistim aldjabar dengan mendefinisikan suatu operasi o didalamnja, seperti berikut:

$(f \text{ o } g)(\alpha) = f(\alpha) \,.\, g(\alpha)$ untuk setiap α, dimana
. menjatakan operasi dalam $G\alpha$

Mudah dilihat bahwa (Φ, o) membentuk sebuah grup, sebab:

(i) o tertutup

(ii) o asosiatip, sebab . asosiatip dalam tiap $G\alpha$

(iii) pandang pemetaan $e \in \Phi$ jang bersifat $e(\alpha) = e_{G\alpha}$ untuk setiap α, maka $e \circ x = x$ untuk setiap $x \in \Phi$

(iv) untuk setiap $x \in \Phi$, pandanglah pemetaan x^{-1} jang didefinisikan sebagai berikut:

$$x^{-1}(\alpha) = [x(\alpha)]^{-1}, \text{ untuk setiap } \alpha$$

maka $x^{-1} \circ x = e$

Grup (Φ, o) disebut produk langsung lengkap dari grup $G\alpha$ dalam koleksi Γ jang berindekskan Λ dan dituliskan sebagai:

$$\Phi = \overset{\text{Leng}}{\underset{\alpha \in \Lambda}{\pi}} G\alpha$$

Teorema 2.1: Φ_{Lem} subgrup dari $\underline{\Phi}$ dan $\underline{\Phi}$ subgrup dari Φ

Bukti: Tjukup dibuktikan bahwa Φ_{Lem} subgrup dari Φ dan $\underline{\Phi}$ subgrup dari Φ.

Misalkan x dan y dalam Φ_{Lem}, maka $x(\alpha) = e_{G\alpha}$ untuk setiap α ketjuali sedjumlah hingga, dan $y(x) = e_{G\alpha}$ untuk setiap α ketjuali sedjumlah hingga.

Djadi $(x \circ y)(\alpha) = x(\alpha).\, y(\alpha) = e_{G\alpha}.\, e_{G\alpha} = e_{G\alpha}$ untuk setiap α ketjuali sedjumlah hingga. Sedangkan $x^{-1}(\alpha) = [x(\alpha)]^{-1} = (e_{G\alpha})^{-1} = e_{G\alpha}$ untuk setiap α ketjuali sedjumlah hingga.

Ini berarti bahwa xoy dan x^{-1} dalam Φ_{Lem}. Djadi Φ_{Lem} subgrup dari Φ.

Selandjutnja misalkan x dan y dalam $\underline{\Phi}$. Maka $x(\alpha) = e_{G\alpha}$, ketjuali pada suatu $\triangle_1 \subset \Lambda$ jang terhitung. Dan $y(\alpha) = e_{G\alpha}$, ketjuali pada $\triangle_2 \subset \Lambda$ jang terhitung. Maka $(xoy)(\alpha) = x(\alpha) .\, y(\alpha) = e_{G\alpha}.\, e_{G\alpha} = e_{G\alpha}$ ketjuali pada $\triangle_1 \cup \triangle_2$. Dan $\triangle_1 \cup \triangle_2$ terhitung. Djadi xoy dalam $\underline{\Phi}$. Demikian pula $x^{-1}(\alpha) = (x(\alpha))^{-1} = e_{G\alpha}^{-1} = e_{G\alpha}$ untuk setiap α ketjuali pada $\triangle_1$. Maka terbukti bahwa $\underline{\Phi}$ subgrup dari Φ.

Φ_{Lem} disebut produk langsung lemah atau produk langsung sadja dari $G\alpha$

Dituliskan:

$$\Phi_{\text{Lem}} = \overset{\text{Lem}}{\underset{\alpha \in \Lambda}{\pi}} G_\alpha$$

Dalam hal Λ terhitung maka $\Phi = \underline{\Phi}$. Dan dalam hal Λ hingga maka $\Phi = \underline{\Phi} = \Phi_{\text{Lem}}$.

Teorema 2.2 : Djika $\Phi = \overset{\text{Leng}}{\underset{\alpha \in \Lambda}{\pi}} G_\alpha$, maka untuk setiap α terdapat subgrup invarian Φ_α dari Φ jang isomorf dengan G_α.

Bukti :

Pandang subkumpulan Φ_α dari Φ jang berikut

$\Phi\alpha = \{ f \setminus f \, E \, \Phi \, , \, f(\xi) = E_G\xi, \text{ untuk } \xi \neq \alpha \}$

Bila f dan g dalam Φ_α, maka fog dan f^{-1} djuga dalam β_α, sebab (fog) $(\xi) = f(\xi). \, g(\xi) = e_G\xi . \, e_G\xi = e_G\xi$, untuk $\xi \neq \alpha$.

Djadi fog dalam Φ

Sedangkan f^{-1} $(\xi) = [f(\xi)]^{-1} = e_{G\xi}^{-1} = e_G\xi$, untuk $\xi \neq \alpha$

Djadi f^{-1} djuga dalam Φ_α. Maka Φ_α adalah sebuah subgrup dari Φ.

Kemudian akan dibuktikan bahwa Φ_α subgrup invarian dari Φ. Misalkan f E Φ_α dan h E Φ. Harus dibuktikan bahwa hofoh^{-1} E Φ_α. (hofoh^{-1}) $(\xi) = h\,(\xi). \, f(\xi). \, (h(\xi))^{-1} = h(\xi). \, e_G\xi. \, (h(\xi))^{-1} = e_G\xi$, untuk $\xi \neq \alpha$

Djadi Φ_α sebuah subgrup invarian dari Φ.

Achirnja akan dibuktikan bahwa $\Phi\alpha \cong G_\alpha$

Untuk setiap x dalam G_α, terdapat f dalam Φ_α sehingga $f(\alpha) = x$.

Kita njatakan pemetaan seperti ini dengan f_x. Kemudian kita buat pemetaan φ: $G_\alpha \rightarrow \Phi_\alpha$ seperti berikut: $\varphi\,(x) = f_x$

Tinggal diperiksa apakah φ suatu isomorfisma. Per-tama² $\varphi(x.y) = f_{x.y}$

Sedangkan $\varphi(x) o \varphi(y) = f_x \text{ o } f_y$

Dan $(f_x \text{ o } f_y)\,(\xi) = f_x\,(\xi). \, f_y\,(\xi) = e_{G\xi} \, . \, e_{G\xi} = e_{G\xi}$, bila $\xi \neq \alpha$.

Selandjutnja $f_{x.y}\,(\xi) = e_{G\xi}$, bila $\xi \neq \alpha$.

Adapun $(f_x \text{ o } f_y)\,(\alpha) = f_x\,(\alpha) \, . \, f_y\,(\alpha) = x.y$ dan $f_{x.y}\,(\alpha) = x.y$

Ini berarti bahwa $\varphi(x.y) = f_{x.y} = f_x \text{ o } f_y = \varphi(x) \text{ o } \varphi(y)$

Maka φ adalah suatu homomorfisma. Disamping itu φ suatu pemetaan jang bidjektif atau 1 — 1 pada, karena bila $x \neq y$, maka $\varphi(x) = f_x \neq \varphi(y) = f_y$, sedangkan untuk setiap f E Φ terdapat z E G_α sehingga $\varphi(z) = f$

Teorema 2.3: Djika $\Gamma = \{G_\alpha\}$ suatu koleksi sebarang dari subgrup² suatu grup G, dan $G = \underset{\alpha \, Dlm}{\pi} \times G_\alpha$, maka $G \cong \underset{\alpha E \Lambda}{\overset{Lem}{\pi}} G\alpha$, dimana Λ suatu kumpulan jang kardinalnja sama dengan kardinal Γ.

Sengadja buktinja tak diberikan disini.

Achirulkata perlu didjelaskan bahwa bila $\Gamma = \{G_i\}$ suatu koleksi takhingga dari subgrup² suatu grup G (walaupun terhitung), dan $G = \underset{i \, Dlm}{\pi} \times G_i$,

maka $\underset{i \, Lr}{\pi} \times G_i \not\cong G$

4. TJONTOH[2]

1. Kita ambil grup multiplikatip dari kumpulan semua bilangan rasional positip Q^+. Biasanja dituliskan dengan notasi (Q^+, x)

   Untuk setiap bilangan prim p kita pandang subgrup $G_{p_i} = [p_i]$

   Maka $Q^+ = \underset{i\ Dlm}{\pi} \times G_{p_i}$ sebab:

   (i) G_{p_i} subgrup invarian untuk setiap i karena Q^+ komutatip

   (ii) $Q^+ = \left[\bigcup_i G_{p_i} \right]$

   (iii) $G_{p_i} \cap \left[\bigcup_{\substack{j \\ j \neq i}} G_{p_j} \right] = \{1\}$

   Djelas disini bahwa $Q^+ = \underset{i\ Dlm}{\pi} \times G_{pi}$ tidak isomorf dengan $\underset{i\ Lr}{\pi} \times G_{pii}$ sebab Q^+ terhitung sedangkan jang terachir tidak.

2. Ambil sebuah koleksi grup dengan satu unsur sadja G. Kita pilih sebagai G, grup aditip dari bilangan riil jaitu (R, +). Untuk kumpulan indeksnja diambil R. Maka disini $\cup G_\alpha = \cup R = R$

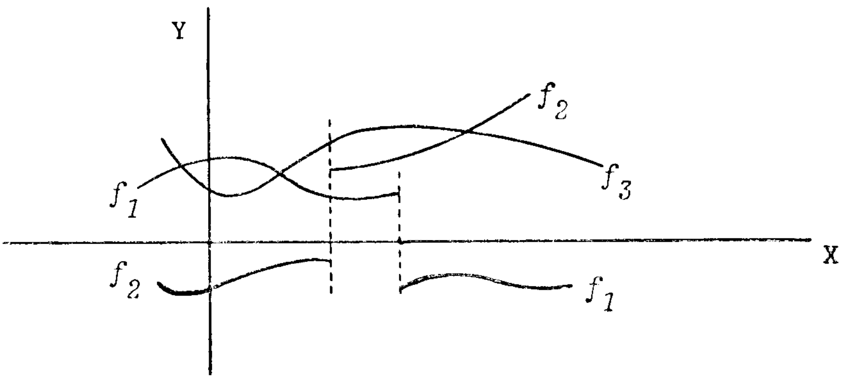
   Djadi $\Phi = \{f \mid f: R \to R\}$ = kumpulan semua pemetaan (fungsi berharga satu) dari R ke R. Dalam hal ini $\Phi = \overline{\Phi}$

   Operasi dalam Φ tidak lain adalah pendjumlahan dua fungsi.

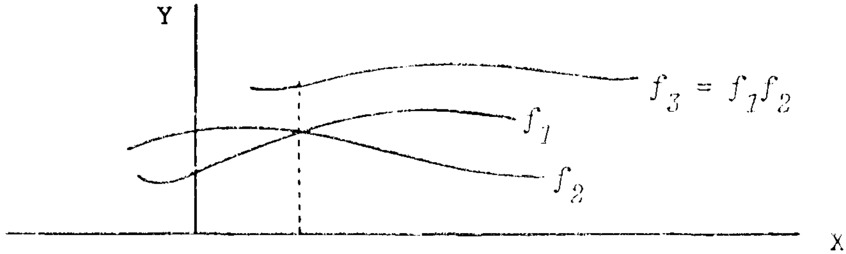
   Hal umum dari tjontoh ini jaitu sebuah koleksi Γ jang terdiri dari SATU grup G, dengan kumpulan indeksnja G sendiri. Dengan mengambil grup jang tak terhitung, produk langsung lengkapnja tidak lain adalah kumpulan semua pemetaan dari G ke G. Dan operasi dalam Φ adalah

   $$(f \circ g)(x) = f(x).g(x) \text{ untuk setiap x dalam G.}$$

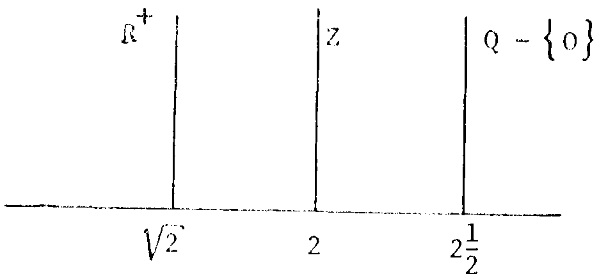
3. Ambil $\Gamma = \{G\}$ dengan $G = (R - \{o\}, \times)$ jaitu grup multiplikatip dari kumpulan bilangan riil taknol. Dan untuk kumpulan indeksnja diambil $\Lambda = R$. Maka produk langsung lengkapnja Φ = kumpulan semua fungsi jang tak pernah nol (grafiknja tak memotong sumbu-x). Operasinja adalah perkalian dua fungsi.



4. Ambil $\Gamma = \{G\}$ dan $G = (R^+, x)$ jaitu grup multiplikatip dari bilangan riil positip, sedangkan kita pilih $\Lambda = R$
Produk langsung lengkapnja Φ = kumpulan semua fungsi jang berharga positip dan operasinja adalah perkalian dua fungsi.



5. $\Gamma = \{(R^+, x), (Z, +), (Q - 0, x)\}$ dan $\Lambda = R$
Pengindeksannja didefinisikan dengan pemetaan g: $R \to \Gamma$ sbb:
$g(x) = Z$, djika x bulat
$g(x) = Q - \{0\}$, djika x rasional tidak bulat
$g(x) = R^+$, djika x irasional
Dapat „digambarkan" sebagai.:



6. $G = \{G_1, G_2, G_3, (Z, +), (Q, +), (R^+, x)\}$ dan $\Lambda = R$
Dimana G_1 = grup siklis tingkat 2
G_2 = grup siklis tingkat 3
G_3 = grup Klein
Pengindeksan dari G oleh Λ didefinisikan dengan pemetaan g ; $R \to \Gamma$ sbb.:
$g(x) = Z$, bila x bulat dan $x \neq 0$ serta $x \neq 10$
$g(0) = G_3$
$g(10) = R^+$
$g(x) = Q$, bila x rasional tidak bulat
$g(x) = G_1$ bila x irasional aldjabar
$g(x) = G_2$ bila x transenden
Maka $\bar{\Phi}$ = kumpulan fungsi² dengan argumen riil dan harga fungsinja unsur dari salah satu anggauta dari G. Sedangkan Φ = kumpulan semua fungsi jang termasuk $\bar{\Phi}$ jang memenuhi $f(x) \in g(x)$ untuk setiap x riil.
Operasi dalam Φ dapat dilakukan „titik" demi „titik".

7. Γ = koleksi semua grup siklis bertingkat hingga = $\{G_i\}$, G_i = grup siklis tingkat i.
Λ = kumpulan bilangan riil positif = R^+.
Pengindeksannja didefinisikan dengan pemetaan $g : R^+ \rightarrow \Gamma$ sbb.:
$g(x)$ = grup siklis tingkat satu bila x dalam interval $(0,1]$
$g(x)$ = grup siklis tingkat 2 bila x dalam interval $(1.2]$
$g(x)$ = grup siklis tingkat n bila x dalam interval $(n - 1,n]$
$\Phi = \{f/f: \Lambda \rightarrow \bigcup G_i,\ f(x) \in g(x)\}$

Kepustakaan

1. Commutative Algebra, Vol. I : Oscar Zariski and Pierre Samuel D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey, 2nd edition, 1959.
2. Lectures in Abstract Algebra, Vol. I: Nathan Jacobson D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, N.J 2nd edition 1955.
3. The Theory of Groups : Marshall Hall, Jr The Macmillan Company 1st edition 1959.
4. The Theory of Groups Vol. I : A.G. Kurosch, translated from the Russian by KA. Hirsch; Chelsea Publising Company, N. York, N.Y. 2nd edition 1960.
5. Modern Algebra Vol. I : B.L.v.d. Waerden, 2nd edition/English Translation, 1953.
6. General Topology : Waclaw Sierpinski 2nd edition, 1956 University of Toronto Press, Toronto.
7. Abstract Algebra : Mac Duffee John Wiley & Son, Inc. London 5th edition, 1956.