



Studi Pengembangan Model Turbulen κ - ϵ untuk Sirkulasi Arus II: Aliran Turbulen Dua Dimensi pada Saluran Ekspansi

M. Syahril B. Kusuma, Rani A. Rahayu, Eka Oktarianto, Hadi Kardana & M. Cahyono

Kelompok Keahlian Teknik Sumber Daya Air
Fakultas Teknik Sipil & Lingkungan ITB

Abstrak. Makalah ini menyajikan hasil studi pemodelan mengenai pola aliran turbulen 2 dimensi pada sebuah saluran yang mengalami ekspansi dengan memanfaatkan model *depth averaged κ - ϵ* . Model numerik dikembangkan berdasarkan metoda beda hingga, dimana untuk pemecahan persamaan hidrodinamik digunakan kombinasi metoda ekplisit Mac Cormack dan metoda pemisahan operator splitting. Sebagai tracer untuk melakukan visualisasi struktur aliran digunakan model transport kualitas air. Suku konveksi, difusi, dan reaksi diselesaikan dengan skema QUICKEST, *Central Scheme*, dan *Euler Scheme*. Hasil yang dicapai model dalam mensimulasikan pola arus untuk kasus saluran lurus dan ekspansi menunjukkan tingkat kesesuaian yang cukup baik dengan hasil pengukuran di Laboratorium. Dibandingkan dengan model non turbulen, hasil model menunjukkan peningkatan akurasi yang signifikan dalam hal besar kecepatan arus, pola arus dan sebaran konstituent kualitas air, terutama pada zona resirkulasi. Model dapat mensimulasikan pola sirkulasi arus dan terbentuknya vorteks pada zona sirkulasi. Namun demikian, untuk aliran dengan bilangan Reynold cukup rendah, osilasi dan ketidakstabilan numerik masih menjadi kendala.

Kata kunci: aliran turbulen 2 dimensi; *depth averaged kappa-epsilon model*; pola arus; saluran ekspansi.

Abstract. This paper present the results of modeling study of two dimensions turbulent flow in an expansion canal by using *depth averaged κ - ϵ* model. The numerical model was developed using finite difference method where hydrodynamic equation was solved by the combination of Mac Cormack and splitting methods. Water quality distribution is used as a tracer to visualize the flow structure. QUICKEST, Central, and Euler Scheme are used to find convection, diffusion, and reaction term solution. Model results have shown good agreement with those found by laboratory measurement and better assessment compared to those found by non turbulent model. In general, the result had shown better assessment on flow structure, velocity field, turbulent/vortex bursting and water quality distribution compared to those resulted by non turbulent model. But for small Reynolds number turbulent flow, where more densed grid and high courant number is needed, the model become oscillating and unstable.

Keywords: *depth averaged kappa-epsilon model; expansion canal; flow pattern; two D turbulent flow.*

1 Pendahuluan

Pada perencanaan jaringan tata air, masalah ekspansi (pelebaran) saluran seringkali tidak dapat dihindari sebagai akibat adanya kebutuhan penyesuaian dimensi saluran terhadap perubahan debit, persilangan bangunan dengan saluran, kondisi topografi, dll.

Penelitian mengenai struktur aliran pada saluran ekspansi telah banyak dilakukan, namun untuk aliran dengan fluida cair, kebanyakan dari penelitian tersebut bersifat eksperimental dan fokus pada masalah gerusan dan aliran di luar daerah sirkulasi, sementara itu untuk struktur aliran pada zona resirkulasi banyak dilakukan terutama untuk aliran dengan fluida udara. Uraian pada paragraf di bawah ini membahas rangkuman dari beberapa hasil penelitian mengenai struktur aliran turbulen akibat penurunan dasar saluran yang sebagian besar berlaku untuk kasus fluida udara.

Pada batas awal sebuah saluran ekspansi, massa fluida akan lepas landas dari dinding membentuk *free mixing layer* di bagian hilir dan akan menyentuh dinding kembali pada titik yang disebut *reattachment point* setelah menempuh jarak tertentu yang disebut *reattachment length* [1]. Pada saluran yang mengalami ekspansi sebesar H , posisi *reattachment point* berfluktuasi pada daerah sepanjang $2H$ dan panjang *reattachment length* bervariasi antara $4-10H$, bergantung pada turbulensi aliran pada bagian hulu ekspansi [2]. Sepanjang jarak *reattachment length* tersebut aliran mengalami *gradient* tekanan positif dan tidak stabil karena membentuk zona resirkulasi pada daerah sekitar dinding. Pada zona ini, arah aliran berlawanan dengan arah aliran utama. Kondisi ini mengakibatkan aliran tidak stabil dan bersifat turbulen [3-5]. Pada zona tersebutlah struktur *coherent* turbulen akan terbentuk secara periodik melalui apa yang disebut fenomena *bursting* [2, 3, 5]. Pada zona resirkulasi kecepatan fluktuasi menjadi besar dan dapat melebihi kecepatan rata-rata aliran. Pada titik *reattachment* akan terjadi pembelahan vorteks yang berlawanan arah, satu vorteks menuju zona resirkulasi dan satu vorteks mengalir menuju hilir [2, 6]. Pada zona resirkulasi, vorteks mempunyai kemampuan untuk menstimulir pembentukan vorteks yang berlawanan arah sebagai konsekuensi dari kekekalan massa [2]. Pada prinsipnya, proses yang sama dengan karakteristik yang berbeda akan dialami oleh sebuah massa fluida cair bila dialirkan melalui saluran tersebut di atas. Perbedaan karakteristik ini terutama diakibatkan adanya pengaruh gravitasi pada fluida cair. Perbedaan yang dapat dengan mudah diidentifikasi antara lain adalah bilangan Reynold karakteristik turbulen, panjang

reattachment length, bursting karakteristik dan ketebalan lapisan *mixing layer* [7-10].

Metoda penyelesaian masalah turbulen tersebut diatas telah banyak dikembangkan, antara lain adalah metoda *Zero equation model*, *One equation model*, *Reynolds stress model* dan *Two equation κ - ε model*. Namun demikian, karena tingkat akurasi yang diberikan cukup baik, metoda *two equation κ - ε model* lebih banyak dikembangkan, seperti yang akan disajikan/dibahas pada makalah ini.

2 Persamaan Pengatur

Persamaan pengatur aliran ini diturunkan berdasarkan persamaan Navier-Stokes untuk aliran turbulen 2 dimensi tak mampu mampat dalam bentuk *depth-averaged velocity*. Beberapa anggapan yang dipakai dalam melakukan penurunan persamaan pengatur tersebut adalah sbb:

1. Fluida tak mampu mampat (*incompressible*)
2. Kecepatan aliran yang ditinjau adalah kecepatan rata-rata
3. Aliran adalah dua dimensi (arah $-x$ dan arah $-y$)
4. Kemiringan dasar saluran relatif kecil (*sin~tangen~kemiringan saluran*)
5. Distribusi tekanan fluida bersifat hidrostatis (*viscous stress diabaikan*)
6. Pengaruh gaya putaran bumi (*efek coriolis*) diabaikan
7. Konstituent tercampur merata (*well mixed*).

2.1 Persamaan Kontinuitas & Momentum

Dengan menerapkan prinsip dekomposisi Reynold terhadap besaran aliran turbulen, persamaan rata-rata kontinuitas dan momentum untuk aliran tiga dimensi dapat dituliskan secara berturutan dalam bentuk sbb.:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j} \right] \quad (2)$$

Integrasi persamaan (1) dan (2) terhadap kedalaman dengan menggunakan metode "Leibnitz Rule" akan memberikan persamaan rata-rata kontinuitas dan momentum dalam bentuk *Depth-Averaged Velocity* untuk aliran 2 dimensi tak mampu mampat sbb.:

Persamaan Kontinuitas

$$\left[\frac{\partial H}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial(UH)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial(VH)}{\partial y} \right] = 0 \quad (3)$$

Persamaan Momentum

Arah x

$$\frac{\partial(hU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hU^2 + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial(hUV)}{\partial y} = ghS_{0x} - \frac{1}{\rho} \tau_{bx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{Sx} \quad (4)$$

Arah y

$$\frac{\partial(hV)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(hV^2 + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial(hUV)}{\partial x} = ghS_{0y} - \frac{1}{\rho} \tau_{by} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{Sy} \quad (5)$$

dimana

$$U = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} u dz \quad V = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} v dz$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'u'}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \rho \overline{v'v'}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'}$$

τ_{bx} dan τ_{sx} masing-masing merupakan tegangan dasar saluran dan tegangan permukaan air, sedangkan S_{0x} dan S_{0y} masing-masing merupakan kemiringan energi pada arah x dan y.

2.2 Persamaan Model Turbulen κ - ϵ

Persamaan (2) sangat kompleks dan untuk penyelesaiannya membutuhkan *Closure Problem* dari suku "Reynold Stress" yang dalam hal ini dapat didekati dengan menggunakan pendekatan Boussinesq Eddy Viscosity sbb.:

$$\overline{-u_i' u_j'} = \hat{v}_t \left[\frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(U_j)}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \hat{k} h \delta_{ij} \quad (6)$$

dimana

δ_{ij} = delta Kronecker

$$\delta_{ij} \begin{cases} i = j, \delta = 1 \\ i \neq j, \delta = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Dari analisis dimensional, didapatkan bahwa besaran *eddy viscosity* (v_t) sebanding dengan karakteristik skala kecepatan (v) dan skala panjang (ℓ), yaitu $v_t \approx v\ell$.

Model turbulen κ - ε dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan Reynold Stress dengan menggunakan 2 persamaan tambahan yaitu *Turbulence Kinetic-Energy Equation* dan *Turbulence Energy Dissipation Rate Equation*. Persamaan Energi Kinetik Turbulen tersebut dapat dituliskan sbb.:

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j}}_i = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_i' \left(\frac{1}{2} u_j' u_j' + \frac{p'}{\rho} \right) \right]}_{ii} - \underbrace{\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}}_{iii} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[v u_j' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \right]}_{iv} - \underbrace{v \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)}_v \quad (8)$$

Pada persamaan (8) tersebut, suku (i), (ii), (iii), (iv) dan (v) adalah suku-suku yang menunjukkan laju perubahan energi turbulen, *convective diffusion* energi turbulen, produksi energi turbulen, kerja turbulen *stresses* dan *turbulent viscous dissipation*. Bila v diasumsikan konstan maka persamaan (8) menjadi:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_i' \left(\frac{1}{2} u_j' u_j' + \frac{p'}{\rho} \right) \right] - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - v \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \quad (9)$$

Launder & Spalding [11] menuliskan persamaan (9) diatas dalam bentuk:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_D \frac{k^{3/2}}{\ell} \quad (10)$$

Sementara itu, persamaan *Turbulence Energy Dissipation Rate* (ε) dapat dituliskan sbb.:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}}_i &= -2\nu \underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j} \right)}_{ii} \\
&\quad - 2\nu \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \left(u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right)}_{iii} - 2\nu \underbrace{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}_{iv} \\
&\quad - 2 \underbrace{\left(\nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2}_v - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j' \varepsilon)}_{vi} - \underbrace{\frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right)}_{vii} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j \partial x_j}}_{viii} \quad (11)
\end{aligned}$$

dimana suku (i), (ii)+(iii), (iv), (v), (vi)+(vii)+(viii) adalah suku-suku yang menunjukkan laju perubahan ε , transport energi kinetis oleh interaksi dengan gerakan rata-rata (*generation of ε by mean flow*), transfer energi kinetis oleh efek kecepatan (*generation of ε by self stretching of vortex tube*), *viscous destruction* dan difusi. Persamaan (11) disederhanakan oleh Launder and Spalding [11] menjadi sebagai berikut:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (12)$$

dimana:

$$P = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (13)$$

Persamaan tersebut diatas hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan *closure-problem* dari persamaan *reynolds stress* dalam bentuk *depth averaged* setelah dimodifikasi dalam bentuk *depth integrated*. Dalam hal ini, Chapman and Kuo [12] telah memodifikasi model Rastogi and Rodi [13] dalam bentuk persamaan yang lebih konsisten dengan persamaan kontinuitas *depth averaged* dan persamaan momentum *depth averaged* sehingga diperoleh hubungan *depth-integrated Reynolds stresses* dengan *depth integrated strain rates* sebagai berikut:

$$-\frac{1}{h} \int_{z_b}^{h+z_b} \overline{u_i' u_j'} dz = \hat{\nu} \left[\frac{\partial(\nu U_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\nu U_j)}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \hat{k} h \delta_{ij} \quad (14)$$

dimana δ_{ij} adalah *delta kronecker* dan $\hat{\nu}_t$ adalah Viskositas Turbulen untuk *depth averaged* yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{\nu}_t = C_\mu \frac{\hat{k}^2}{\hat{\varepsilon}} \quad (15)$$

Pemodelan pada makalah ini menggunakan model Turbulen κ - ε yang diperoleh dari pendekatan Chapman and Kuo [12] tersebut di atas sehingga diperoleh persamaan energi kinetis turbulen dan laju disipasi energi turbulen yang berlaku untuk persamaan *depth averaged* sbb.:

• **Persamaan K**

$$\frac{\partial(h\hat{k})}{\partial t} + \frac{\partial(hU\hat{k})}{\partial x} + \frac{\partial(hV\hat{k})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\hat{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial(h\hat{k})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\hat{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial(h\hat{k})}{\partial y} \right] + p_h + p_k - \hat{\varepsilon}h \quad (16)$$

• **Persamaan ε**

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\hat{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(hU\hat{\varepsilon})}{\partial x} + \frac{\partial(hV\hat{\varepsilon})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\hat{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(h\hat{\varepsilon})}{\partial x} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\hat{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(h\hat{\varepsilon})}{\partial y} \right] + \frac{\hat{\varepsilon}}{k} (C_1 p_h - C_2 \hat{\varepsilon}h) + p_\varepsilon \end{aligned} \quad (17)$$

dimana:

$$P_h = \frac{\hat{\nu}_t}{h} \left\{ 2 \left[\frac{\partial(hU)}{\partial x} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial(hV)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right]^2 \right\} \quad (18)$$

$$P_k = \frac{g}{C^2} q^3, P_\varepsilon = \frac{C_2 C_\mu^{1/2} g^{5/4} q^4}{hD^{1/2} C^{5/2}}, q = \sqrt{U^2 + V^2} \quad (19)$$

dimana besaran koefisien-koefisien pada persamaan tersebut adalah : $C_\mu = 0.09$, $C_1 = 1.44$, $C_2 = 1.92$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$ dan $D = 0.075$

Secara lengkap persamaan hidrodinamik dan κ - ε diatas dapat dituliskan kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} H \\ HU \\ HV \\ H\hat{k} \\ H\hat{e} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} UH \\ U^2H \\ UVH \\ UH\hat{k} \\ UH\hat{e} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} VH \\ UVH \\ V^2H \\ H V \hat{k} \\ H V \hat{e} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ 2\hat{v}_t \frac{\partial HU}{\partial x} - \frac{2}{3} H\hat{k} \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \\ \frac{\hat{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial(H\hat{k})}{\partial x} \\ \frac{\hat{v}_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial(H\hat{e})}{\partial x} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \\ 2\hat{v}_t \frac{\partial HV}{\partial y} - \frac{2}{3} H\hat{k} \\ \frac{\hat{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial(H\hat{k})}{\partial y} \\ \frac{\hat{v}_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial(H\hat{e})}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ \left[\frac{gHS_{ox} - \frac{gU\sqrt{U^2+V^2}}{C^2} + \frac{\rho_a C^* W_x W}{\rho}}{gHS_{oy} - \frac{gV\sqrt{U^2+V^2}}{C^2} + \frac{\rho_a C^* W_y W}{\rho}} \right] \\ \left\{ \frac{\hat{v}_t}{h} \left[2 \left[\frac{\partial(hU)}{\partial x} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial(hV)}{\partial y} \right]^2 \right] + \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right]^2 \right\} \\ + \left\{ \frac{g}{C^2} \left(\sqrt{U^2+V^2} \right)^3 \right\} - \hat{e}h \\ \left(C_1 \frac{\hat{v}_t}{h} \left\{ 2 \left[\frac{\partial(hU)}{\partial x} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial(hV)}{\partial y} \right]^2 \right\} + \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right]^2 \right) - C_2 \hat{e}h \\ + \left\{ \frac{C_2 C_u^{1/2} g^{5/4} \left(\sqrt{U^2+V^2} \right)^4}{hD^{1/2} C^{5/2}} \right\} \end{bmatrix} \quad (20)
\end{aligned}$$

2.3 Persamaan Transport Konstituent Kualitas Air

Persamaan transport konveksi-difusi, yang penurunannya didasarkan pada penggunaan hukum kekekalan massa di ruang tilik, dapat dituliskan sbb.:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi) + \frac{\partial}{\partial x} (U\Phi) + \frac{\partial}{\partial x} (V\Phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad (21)$$

2.4 Syarat Batas

Pada kondisi batas perairan diterapkan syarat batas *Inward Difference*, sedangkan pada dinding dianggap kecepatan aliran sama dengan nol.

3 Penyelesaian Numerik

Metoda penyelesaian numerik dari persamaan yang digunakan adalah sbb.:

1. Persamaan hidrodinamik diselesaikan dengan Skema Mac Cormack-*Splitting*.
2. Persamaan κ - ϵ diselesaikan dengan Skema QUICKEST pada suku konveksi, Skema *Central Difference* pada suku difusi, dan Skema Euler pada suku reaksi.
3. Persamaan kualitas air/material transport (salinitas) dengan skema QUICKEST.

3.1 Penyelesaian Numerik Hidrodinamika dengan Teknik Mac Cormack-Splitting

Secara lengkap skema *splitting* untuk persamaan Hidrodinamik adalah:

$$F^{n+2} = \left[\left(L_x L_y L_{xx} L_{yy} L_s \right) \bullet \left(L_s L_{yy} L_{xx} L_y L_x \right) \right] F^n$$

Suku L_x , L_y , L_{xx} , L_{yy} dan L_s diselesaikan dengan metode Mac Cormack sbb.:

1. Penyelesaian numerik persamaan diferensial orde satu L_x

Predictor

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* &= \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} UH \\ U^2H \\ UVH \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} UH \\ U^2H \\ UVH \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} - gH_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ H+z \\ 0 \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} 0 \\ H+z \\ 0 \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3}H\hat{k} \\ 0 \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3}H\hat{k} \\ 0 \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

Corrector

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{**} &= \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} UH \\ U^2H \\ UVH \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} UH \\ U^2H \\ UVH \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} - gH_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ H+z \\ 0 \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} 0 \\ H+z \\ 0 \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3}H\hat{k} \\ 0 \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3}H\hat{k} \\ 0 \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

n+1

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* + \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{**} \right\} \quad (24)$$

2. Penyelesaian numerik persamaan diferensial orde satu L_y

Predictor

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* = \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} UH \\ UVH \\ V^2H \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} UH \\ UVH \\ V^2H \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} - gH_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z+H \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z+H \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} \\ + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3}H\hat{k} \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3}H\hat{k} \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} \quad (25)$$

Corrector

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{**} = \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} UH \\ UVH \\ V^2H \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} UH \\ UVH \\ V^2H \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} - gH_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z+H \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z+H \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} \\ + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3}H\hat{k} \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3}H\hat{k} \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} \quad (26)$$

n+1

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* + \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{**} \right\} \quad (27)$$

3. Penyelesaian numerik persamaan diferensial orde dua L_{xx}

Predictor

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* = \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2v_t \frac{\partial HU}{\partial x} \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} 0 \\ 2v_t \frac{\partial HU}{\partial x} \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} \quad (28)$$

Corrector

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{**} = \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2v_t \frac{\partial HU}{\partial x} \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} 0 \\ 2v_t \frac{\partial HU}{\partial x} \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} \quad (29)$$

n+1

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* + \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{**} \right\} \quad (30)$$

4. Penyelesaian numerik persamaan diferensial orde satu L_{yy} Predictor

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* = \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} \quad (31)$$

Corrector

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{**} = \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \\ \hat{v}_t \left(\frac{\partial HU}{\partial y} + \frac{\partial HV}{\partial x} \right) \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} \quad (32)$$

n+1

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* + \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{**} \right\} \quad (33)$$

5. Penyelesaian numerik persamaan reaksi L_s

Predictor

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* = \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^n + \Delta t \begin{bmatrix} 0 \\ -g \frac{U\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 H} + \frac{\rho_a C^* W_x W}{\rho} \\ -g \frac{V\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 H} + \frac{\rho_a C^* W_y W}{\rho} \end{bmatrix}_{i,j}^n \quad (34)$$

Corrector

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{**} = \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* + \Delta t \begin{bmatrix} 0 \\ -g \frac{U\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 H} + \frac{\rho_a C^* W_x W}{\rho} \\ -g \frac{V\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 H} + \frac{\rho_a C^* W_y W}{\rho} \end{bmatrix}_{i,j}^* \quad (35)$$

n+1

$$\begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^* + \begin{bmatrix} H \\ UH \\ VH \end{bmatrix}_{i,j}^{**} \right\} \quad (36)$$

3.2 **Penyelesaian Numerik Suku Turbulen κ - ε dengan Teknik *Splitting***

1. Penyelesaian numerik persamaan konveksi κ - ε $L_{x\kappa\varepsilon}$

Konveksi κ - ε dalam arah X diselesaikan dengan menggunakan skema QUICKEST:

$$\left[\widehat{hk} \right]_{i,j}^{n+1} = \left[\widehat{hk} \right]_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F(\widehat{hk})_{i+1/2,j} - F(\widehat{hk})_{i-1/2,j} \right)$$

dimana:

$$\begin{aligned}
F(\hat{h}k)_{i+\frac{1}{2},j} &= U_{i+\frac{1}{2},j} * (\hat{h}k)_{i+\frac{1}{2},j} \\
U_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{U_{i,j} + U_{i+1,j}}{2} \\
(\hat{h}k)_{i+\frac{1}{2},j} &= \left[(\hat{h}k)_{\text{lin}} - Cr^R \text{Grad}_{i,j}^R \frac{\Delta x}{2} + \left\{ \frac{\alpha_R}{2} - \frac{1}{6} (1 - (Cr^R)^2) \right\} \text{Curv}_{i,j}^R \Delta x^2 \right] \\
(\hat{h}k)_{\text{lin}} &= \frac{(\hat{h}k)_{i,j} + (\hat{h}k)_{i+1,j}}{2} \\
Cr^R &= \frac{U_{i+\frac{1}{2},j} \Delta t}{\Delta x} \\
\text{Grad}_{i,j}^R &= \frac{(\hat{h}k)_{i+1,j} - (\hat{h}k)_{i,j}}{\Delta x} \\
\alpha^R &= \frac{D_{i+\frac{1}{2},j} \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{D_{i,j} + D_{i+1,j}}{2} * \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\
\text{Curv}_{i,j}^R &= \frac{(\hat{h}k)_{i+1,j}^n - 2(\hat{h}k)_{i,j}^n + (\hat{h}k)_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad \text{jika } U_{i+\frac{1}{2},j} > 0 \\
&= \frac{(\hat{h}k)_{i+2,j}^n - 2(\hat{h}k)_{i+1,j}^n + (\hat{h}k)_{i,j}^n}{\Delta x^2} \quad \text{jika } U_{i+\frac{1}{2},j} < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\hat{h}k)_{i-\frac{1}{2},j} &= U_{i-\frac{1}{2},j} * (\hat{h}k)_{i-\frac{1}{2},j} \\
U_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{U_{i,j} + U_{i-1,j}}{2} \\
(\hat{h}k)_{i-\frac{1}{2},j} &= \left[(\hat{h}k)_{\text{lin}} - Cr^L \text{Grad}_{i,j}^L \frac{\Delta x}{2} + \left\{ \frac{\alpha_L}{2} - \frac{1}{6} (1 - (Cr^L)^2) \right\} \text{Curv}_{i,j}^L \Delta x^2 \right] \\
(\hat{h}k)_{\text{lin}} &= \frac{(\hat{h}k)_{i,j} + (\hat{h}k)_{i-1,j}}{2} \\
Cr^L &= \frac{U_{i-\frac{1}{2},j} \Delta t}{\Delta x} \\
\text{Grad}_{i,j}^L &= \frac{(\hat{h}k)_{i,j} - (\hat{h}k)_{i-1,j}}{\Delta x} \\
\alpha^L &= \frac{D_{i-\frac{1}{2},j} \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{D_{i,j} + D_{i-1,j}}{2} * \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\
\text{Curv}_{i,j}^L &= \frac{(\hat{h}k)_{i,j}^n - 2(\hat{h}k)_{i-1,j}^n + (\hat{h}k)_{i-2,j}^n}{\Delta x^2} \quad \text{jika } U_{i-\frac{1}{2},j} > 0 \\
&= \frac{(\hat{h}k)_{i+1,j}^n - 2(\hat{h}k)_{i,j}^n + (\hat{h}k)_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad \text{jika } U_{i-\frac{1}{2},j} < 0
\end{aligned}$$

2. Penyelesaian numerik persamaan konveksi κ - ε L_{yke}

Konveksi κ - ε dalam arah Y diselesaikan dengan menggunakan skema QUICKEST:

$$[\hat{h}\hat{k}]_{i,j}^{n+1} = [\hat{h}\hat{k}]_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(F(\hat{h}\hat{k})_{i,j+\frac{1}{2}} - F(\hat{h}\hat{k})_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.1)$$

dimana:

$$F(\hat{h}\hat{k})_{i,j+\frac{1}{2}} = V_{i,j+\frac{1}{2}} * \Phi_{i,j+\frac{1}{2}}$$

$$V_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{V_{i,j} + V_{i,j+1}}{2}$$

$$(\hat{h}\hat{k})_{i,j+\frac{1}{2}} = \left[\phi_{lin} - Cr^R Grad_{i,j}^R \frac{\Delta y}{2} + \left\{ \frac{\alpha^R}{2} - \frac{1}{6} (1 - (Cr^R)^2) \right\} Curv_{i,j}^R \Delta y^2 \right]$$

$$(\hat{h}\hat{k})_{lin} = \frac{(\hat{h}\hat{k})_{i,j} + (\hat{h}\hat{k})_{i,j+1}}{2}$$

$$Cr^R = \frac{V_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta t}{\Delta y}$$

$$Grad_{i,j}^R = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y}$$

$$\alpha^R = \frac{D_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta t}{(\Delta y)^2} = \frac{D_{i,j} + D_{i,j+1}}{2} * \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$$

$$Curv_{i,j}^R = \frac{(\hat{h}\hat{k})_{i,j+1}^n - 2(\hat{h}\hat{k})_{i,j}^n + (\hat{h}\hat{k})_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \text{ jika } V_{i,j+\frac{1}{2}} > 0$$

$$= \frac{(\hat{h}\hat{k})_{i,j+2}^n - 2(\hat{h}\hat{k})_{i,j+1}^n + (\hat{h}\hat{k})_{i,j}^n}{\Delta y^2} \text{ jika } V_{i,j+\frac{1}{2}} < 0$$

$$\begin{aligned}
F(\hat{h}\hat{k})_{i,j-\frac{1}{2}} &= V_{i,j-\frac{1}{2}} * \Phi_{i-\frac{1}{2},j} \\
V_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{V_{i,j} + V_{i,j-1}}{2} \\
(\hat{h}\hat{k})_{i,j-\frac{1}{2}} &= \left[(\hat{h}\hat{k})_{\text{lim}} - Cr^L \text{Grad}_{i,j}^L \frac{\Delta y}{2} + \left\{ \frac{\alpha_L}{2} - \frac{1}{6} (1 - (Cr^L)^2) \right\} \text{Curv}_{i,j}^L \Delta y^2 \right] \\
(\hat{h}\hat{k})_{\text{lim}} &= \frac{(\hat{h}\hat{k})_{i,j} + (\hat{h}\hat{k})_{i,j-1}}{2} \\
Cr^L &= \frac{V_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta t}{\Delta y} \\
\text{Grad}_{i,j}^L &= \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y} \\
\alpha^L &= \frac{D_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{D_{i,j} + D_{i,j-1}}{2} * \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \\
\text{Curv}_{i,j}^L &= \frac{(\hat{h}\hat{k})_{i,j}^n - 2(\hat{h}\hat{k})_{i,j-1}^n + (\hat{h}\hat{k})_{i,j-2}^n}{\Delta y^2} \text{ jika } V_{i,j-\frac{1}{2}} > 0 \\
&= \frac{(\hat{h}\hat{k})_{i,j+1}^n - 2(\hat{h}\hat{k})_{i,j}^n + (\hat{h}\hat{k})_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \text{ jika } V_{i,j-\frac{1}{2}} < 0
\end{aligned}$$

3. Penyelesaian numerik persamaan difusi κ - ε $L_{xxk\epsilon}$

Difusi κ - ε dalam arah X diselesaikan dengan menggunakan *Central Scheme*:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{H}\hat{k} \\ \hat{H}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \hat{H}\hat{k} \\ \hat{H}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n + \begin{bmatrix} \hat{v}_t \\ \sigma_k \\ \hat{v}_t \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix}_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial(\hat{H}\hat{k})}{\partial x} \\ \frac{\partial(\hat{H}\hat{\varepsilon})}{\partial x} \end{bmatrix}_{i+1,j}^n - \begin{bmatrix} \frac{\partial(\hat{H}\hat{k})}{\partial x} \\ \frac{\partial(\hat{H}\hat{\varepsilon})}{\partial x} \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{\partial(\hat{H}\hat{k})}{\partial x} \\ \frac{\partial(\hat{H}\hat{\varepsilon})}{\partial x} \end{bmatrix}_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} \hat{v}_t \\ \sigma_k \\ \hat{v}_t \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix}_{i+1,j}^n - \begin{bmatrix} \hat{v}_t \\ \sigma_k \\ \hat{v}_t \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\}
\end{aligned} \tag{37}$$

dimana:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\hat{H}\hat{k})}{\partial x} \\ \frac{\partial(\hat{H}\hat{\varepsilon})}{\partial x} \end{bmatrix}_{i,j}^n = \begin{bmatrix} \frac{(\hat{H}\hat{k})_{i+1,j} - (\hat{H}\hat{k})_{i-1,j}}{\Delta x} \\ \frac{(\hat{H}\hat{\varepsilon})_{i+1,j} - (\hat{H}\hat{\varepsilon})_{i-1,j}}{\Delta x} \end{bmatrix}^n$$

4. Penyelesaian numerik persamaan difusi κ - ε L_{yyke}

Difusi κ - ε dalam arah Y diselesaikan dengan menggunakan *Central Scheme*:

$$\begin{bmatrix} \widehat{Hk} \\ \widehat{H\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{v}_t \\ \sigma_k \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\widehat{Hk})}{\partial y} \\ \frac{\partial(\widehat{H\varepsilon})}{\partial y} \end{bmatrix} + \frac{\partial(\widehat{Hk})}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \widehat{v}_t \\ \sigma_k \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widehat{Hk} \\ \widehat{H\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \widehat{Hk} \\ \widehat{H\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n + \begin{bmatrix} \widehat{v}_t \\ \sigma_k \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix}_{i,j}^n \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\frac{\partial(\widehat{Hk})}{\partial y} \right]_{i,j+1}^n - \left[\frac{\partial(\widehat{Hk})}{\partial y} \right]_{i,j-1}^n \right\} \\ &+ \frac{\partial(\widehat{Hk})}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} \widehat{v}_t \\ \sigma_k \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix}_{i,j+1}^n - \begin{bmatrix} \widehat{v}_t \\ \sigma_k \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix}_{i,j-1}^n \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

dimana:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\widehat{Hk})}{\partial y} \\ \frac{\partial(\widehat{H\varepsilon})}{\partial y} \end{bmatrix}_{i,j}^n = \begin{bmatrix} \frac{(\widehat{Hk})_{i,j+1} - (\widehat{Hk})_{i,j-1}}{\Delta y} \\ \frac{(\widehat{H\varepsilon})_{i,j+1} - (\widehat{H\varepsilon})_{i,j-1}}{\Delta y} \end{bmatrix}^n$$

5. Penyelesaian numerik persamaan reaksi κ - ε L_{ske}

Reaksi κ - ε diselesaikan dengan menggunakan *Euler Scheme*:

$$\begin{bmatrix} \widehat{Hk} \\ \widehat{H\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \begin{bmatrix} \widehat{Hk} \\ \widehat{H\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n + \Delta t \left[\begin{aligned} &\frac{\widehat{v}_t}{h} \left\{ 2 \left[\frac{\partial(hU)}{\partial x} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial(hV)}{\partial y} \right]^2 \right\} + \left\{ \frac{g}{C^2} (\sqrt{U^2 + V^2})^3 \right\} - \widehat{\varepsilon}h \\ &\left(\frac{\widehat{\varepsilon}}{\widehat{k}} \frac{\widehat{v}_t}{h} \left\{ 2 \left[\frac{\partial(hU)}{\partial x} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial(hV)}{\partial y} \right]^2 \right\} - C_2 \widehat{\varepsilon}h \right) + \left\{ \frac{C_2 C_\mu^{1/2} g^{5/4} (\sqrt{U^2 + V^2})^4}{hD^{1/2} C^{5/2}} \right\} \end{aligned} \right]_{i,j} \quad (40)$$

3.3 Penyelesaian Persamaan Transport

Bentuk skema numerik QUICKEST untuk persamaan transport di atas adalah:

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j}^{n+1} = & \Phi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F(\Phi)_{i+1/2,j} - F(\Phi)_{i-1/2,j} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(F(\Phi)_{i,j+1/2} - F(\Phi)_{i,j-1/2} \right) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(D_x F(\Phi)_{i+1/2,j} - D_x F(\Phi)_{i-1/2,j} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(D_y F(\Phi)_{i,j+1/2} - D_y F(\Phi)_{i,j-1/2} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Fluks konvektif akibat U

$$\begin{aligned} F(\Phi)_{i+1/2,j} &= \text{fluks} c x_{i,j}^R \\ &= U_{i+1/2,j} * \Phi_{i+1/2,j} \\ U_{i+1/2,j} &= \frac{U_{i,j} + U_{i+1,j}}{2} \\ \Phi_{i+1/2,j} &= \left[\phi_{\text{lin}} - Cr^R \text{Grad}_{i,j}^R \frac{\Delta x}{2} + \left\{ \frac{\alpha_R}{2} - \frac{1}{6} (1 - (Cr^R)^2) \right\} \text{Curv}_{i,j}^R \Delta x^2 \right] \\ \phi_{\text{lin}} &= \frac{\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{2} \\ Cr^R &= \frac{U_{i+1/2,j} \Delta t}{\Delta x} \\ \text{Grad}_{i,j}^R &= \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} \\ \alpha^R &= \frac{D_{i+1/2,j} \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{D_{i,j} + D_{i+1,j}}{2} * \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ \text{Curv}_{i,j}^R &= \frac{\phi_{i+1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad \text{jika } U_{i+1/2,j} > 0 \\ &= \frac{\phi_{i+2,j}^n - 2\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i,j}^n}{\Delta x^2} \quad \text{jika } U_{i+1/2,j} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\Phi)_{i-\frac{1}{2},j} &= \text{fluks} \bar{c} x_{ij}^L \\
&= U_{i-\frac{1}{2},j} * \Phi_{i-\frac{1}{2},j} \\
U_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{U_{i,j} + U_{i-1,j}}{2} \\
\Phi_{i-\frac{1}{2},j} &= \left[\phi_{\text{lin}} - Cr^L \text{Grad}_{i,j}^L \frac{\Delta x}{2} + \left\{ \frac{\alpha^L}{2} - \frac{1}{6} (1 - (Cr^L)^2) \right\} \text{Curv}_{i,j}^L \Delta x^2 \right] \\
\phi_{\text{lin}} &= \frac{\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{2} \\
Cr^L &= \frac{U_{i-\frac{1}{2},j} \Delta t}{\Delta x} \\
\text{Grad}_{i,j}^L &= \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta x} \\
\alpha^L &= \frac{D_{i-\frac{1}{2},j} \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{D_{i,j} + D_{i-1,j}}{2} * \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\
\text{Curv}_{i,j}^L &= \frac{\phi_{i,j}^n - 2\phi_{i-1,j}^n + \phi_{i-2,j}^n}{\Delta x^2} \quad \text{jika } U_{i+\frac{1}{2},j} > 0 \\
&= \frac{\phi_{i+1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad \text{jika } U_{i+\frac{1}{2},j} < 0
\end{aligned}$$

3.3.1 Fluks Difusif Akibat U

$$\begin{aligned}
D_x F(\Phi)_{i+\frac{1}{2},j} &= \text{fluks} dx_{ij}^R \\
\hat{D}F(\Phi)_{i+\frac{1}{2},j} &= \Delta x \cdot \alpha^R \cdot \left. \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} \\
\left. \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} &= \text{Grad}_{i,j}^R - Cr_{i,j}^R \text{Curv}_{i,j}^R \frac{\Delta x}{2} \\
\alpha^R &= \frac{D_{i+\frac{1}{2},j} \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{D_{i,j} + D_{i+1,j}}{2} * \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\
\text{Grad}_{i,j}^R &= \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x} \\
Cr_{i,j}^R &= \frac{U_{i+\frac{1}{2},j} \Delta t}{\Delta x} \\
\text{Curv}_{i,j}^R &= \frac{\Phi_{i+1,j}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad \text{jika } U_{i+\frac{1}{2},j} > 0 \\
&= \frac{\Phi_{i+2,j}^n - 2\Phi_{i+1,j}^n + \Phi_{i,j}^n}{\Delta x^2} \quad \text{jika } U_{i+\frac{1}{2},j} < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_x F(\Phi)_{i-1/2,j} &= \text{fluksdx}_{ij}^L \\
D\hat{F}(\Phi)_{i-1/2,j} &= \Delta x \cdot \alpha^R \cdot \left. \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \right|_{i-1/2,j} \\
\left. \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \right|_{i-1/2,j} &= \text{Grad}_{i,j}^L - Cr_{i,j}^L \text{Curv}_{i,j}^L \frac{\Delta x}{2} \\
\alpha^L &= \frac{D_{i-1/2,j} \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{D_{i,j} + D_{i-1,j}}{2} * \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\
\text{Grad}_{i,j}^L &= \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta x} \\
Cr_{i,j}^L &= \frac{U_{i-1/2,j} \Delta t}{\Delta x} \\
\text{Curv}_{i,j}^L &= \frac{\phi_{i,j}^n - 2\phi_{i-1,j}^n + \phi_{i-2,j}^n}{\Delta x^2} \quad \text{jika } U_{i+1/2,j} > 0 \\
&= \frac{\phi_{i+1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad \text{jika } U_{i+1/2,j} < 0
\end{aligned}$$

3.3.2 Fluks Konvektif Akibat V

$$\begin{aligned}
F(\Phi)_{i,j+1/2} &= \text{flukscy}_{ij}^R \\
&= V_{i,j+1/2} * \Phi_{i,j+1/2} \\
V_{i,j+1/2} &= \frac{V_{i,j} + V_{i,j+1}}{2} \\
\Phi_{i,j+1/2} &= \left[\phi_{\text{lin}} - Cr^R \text{Grad}_{i,j}^R \frac{\Delta y}{2} + \left\{ \frac{\alpha_R}{2} - \frac{1}{6} (1 - (Cr^R)^2) \right\} \text{Curv}_{i,j}^R \Delta y^2 \right] \\
\phi_{\text{lin}} &= \frac{\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{2} \\
Cr^R &= \frac{V_{i,j+1/2} \Delta t}{\Delta y} \\
\text{Grad}_{i,j}^R &= \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y} \\
\alpha^R &= \frac{D_{i,j+1/2} \Delta t}{(\Delta y)^2} = \frac{D_{i,j} + D_{i,j+1}}{2} * \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \\
\text{Curv}_{i,j}^R &= \frac{\phi_{i,j+1}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad \text{jika } V_{i,j+1/2} > 0 \\
&= \frac{\phi_{i,j+2}^n - 2\phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j}^n}{\Delta y^2} \quad \text{jika } V_{i,j+1/2} < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\Phi)_{i,j-\frac{1}{2}} &= \text{fluksy}_{ij}^L \\
&= V_{i,j-\frac{1}{2}} * \Phi_{i-\frac{1}{2},j} \\
V_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{V_{i,j} + V_{i,j-1}}{2} \\
\Phi_{i,j-\frac{1}{2}} &= \left[\phi_{\text{lin}} - Cr^L \text{Grad}_{i,j}^L \frac{\Delta y}{2} + \left\{ \frac{\alpha_L}{2} - \frac{1}{6} (1 - (Cr^L)^2) \right\} \text{Curv}_{i,j}^L \Delta y^2 \right] \\
\phi_{\text{lin}} &= \frac{\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{2} \\
Cr^L &= \frac{V_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta t}{\Delta y} \\
\text{Grad}_{i,j}^L &= \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y} \\
\alpha^L &= \frac{D_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta t}{(\Delta x) y^2} = \frac{D_{i,j} + D_{i,j-1}}{2} * \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \\
\text{Curv}_{i,j}^L &= \frac{\phi_{i,j}^n - 2\phi_{i,j-1}^n + \phi_{i,j-2}^n}{\Delta y^2} \quad \text{jika } V_{i,j-\frac{1}{2}} > 0 \\
&= \frac{\phi_{i,j+1}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad \text{jika } V_{i,j-\frac{1}{2}} < 0
\end{aligned}$$

3.3.3 Fluks Difusif Akibat V

$$\begin{aligned}
D_y F(\Phi)_{i,j+\frac{1}{2}} &= \text{fluksdy}_{ij}^R \\
D\hat{F}(\Phi)_{i,j+\frac{1}{2}} &= \Delta y \alpha^R \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} \\
\frac{\partial \Phi^*}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} &= \text{Grad}_{i,j}^R - Cr_{i,j}^R \text{Curv}_{i,j}^R \frac{\Delta y}{2} \\
\alpha^R &= \frac{D_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta t}{(\Delta y)^2} = \frac{D_{i,j} + D_{i,j+1}}{2} * \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \\
\text{Grad}_{i,j}^R &= \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta y} \\
Cr_{i,j}^R &= \frac{U_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta t}{\Delta y} \\
\text{Curv}_{i,j}^R &= \frac{\Phi_{i,j+1}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad \text{jika } V_{i,j+\frac{1}{2}} > 0 \\
&= \frac{\Phi_{i,j+2}^n - 2\Phi_{i,j+1}^n + \Phi_{i,j}^n}{\Delta y^2} \quad \text{jika } V_{i,j+\frac{1}{2}} < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_y F(\Phi)_{i,j-\frac{1}{2}} &= \text{fluksdy}_{i,j}^L \\
D\hat{F}(\Phi)_{i,j-\frac{1}{2}} &= \Delta y \cdot \alpha^R \cdot \left. \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} \right|_{i,j-\frac{1}{2}} \\
\left. \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \right|_{i,j-\frac{1}{2}} &= \text{Grad}_{i,j}^L - \text{Cr}_{i,j}^L \text{Curv}_{i,j}^L \frac{\Delta y}{2} \\
\alpha^L &= \frac{D_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta t}{(\Delta y)^2} = \frac{D_{i,j} + D_{i,j-1}}{2} * \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \\
\text{Grad}_{i,j}^L &= \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}}{\Delta x} \\
\text{Cr}_{i,j}^L &= \frac{U_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta t}{\Delta y} \\
\text{Curv}_{i,j}^L &= \frac{\phi_{i,j}^n - 2\phi_{i,j-1}^n + \phi_{i,j-2}^n}{\Delta y^2} \quad \text{jika } V_{i,j-\frac{1}{2}} > 0 \\
&= \frac{\phi_{i,j+1}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad \text{jika } V_{i,j-\frac{1}{2}} < 0
\end{aligned}$$

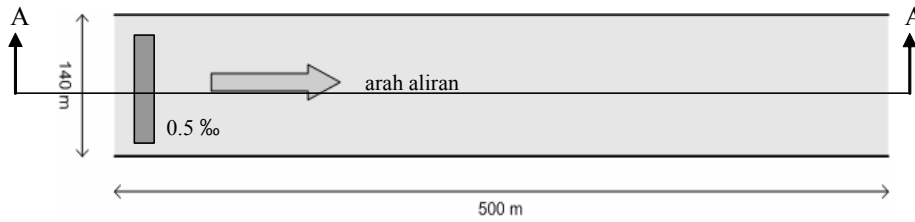
4 Hasil Pemodelan

Kalibrasi dan verifikasi dari model ini telah dilakukan dengan membandingkan hasil pemodelan dengan solusi analitis untuk kasus saluran lurus dan hasil uji lapangan untuk kasus aliran terbuka pada sebuah kolam. Pada proses tersebut juga dilakukan studi banding dengan hasil pemodelan berdasarkan model non turbulen [9]. Pada paper hanya akan disajikan komparasi hasil simulasi model turbulen κ - ϵ yang dikembangkan dengan hasil model non turbulen untuk kasus saluran lurus dan saluran ekspansi satu sisi (lihat Tabel 1). Kasus saluran lurus dilakukan untuk melihat efektifitas suku difusi dan adveksi dalam model. Kasus ekspansi satu sisi dilakukan untuk melihat peningkatan akurasi dari model dalam melingkup fenomena pembangkitan vorteks pada zona sirkulasi. Sketsa masing-masing kasus dapat dilihat pada uraian dalam subbab dibawah ini.

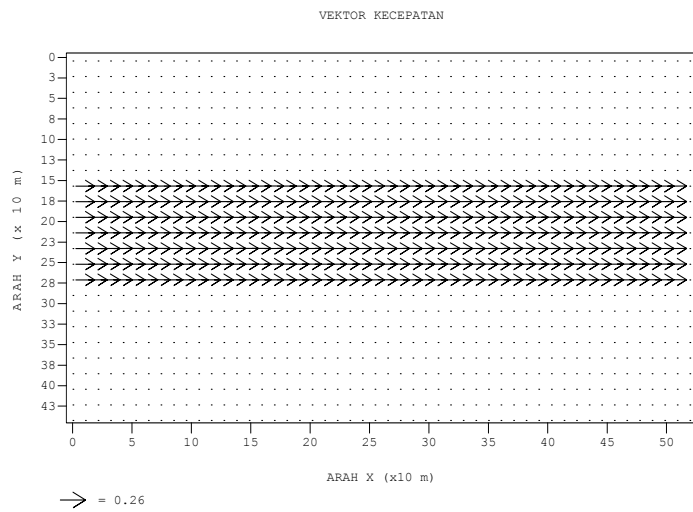
Tabel 1 Data-data masukan test.

Jenis Test	DX (m)	DX (m)	DT (dt)
Saluran Lurus	10	10	0.1
Ekspansi Tiba-tiba	10	10	0.2

4.1.1 Kasus Saluran Lurus

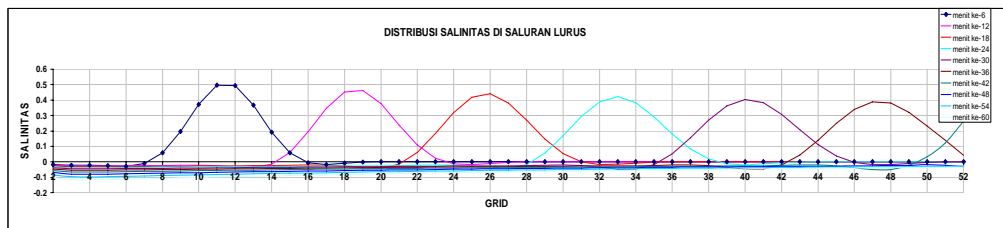


Gambar 1 Model Saluran Lurus.



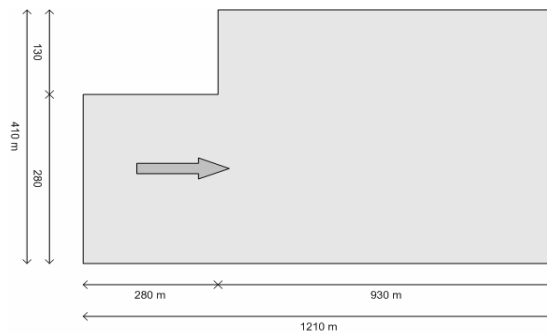
Gambar 2 Vektor Kecepatan.

Pada kasus saluran lurus ini terlihat pergerakan salinitas sesuai dengan arah kecepatan, dengan kecepatan yang sama. Tampak bahwa pergerakan salinitas dipengaruhi oleh konveksi dan difusi, yang ditandai dengan pergerakan puncak dan penyebaran (distribusi) disertai penurunan puncak, dimana pergerakan puncak memiliki kecepatan yang sama dengan kecepatan aliran.

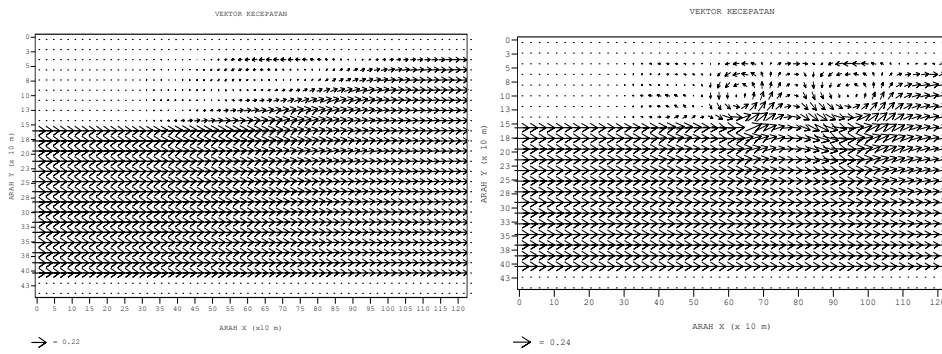


Gambar 3 Grafik Pergerakan Salinitas.

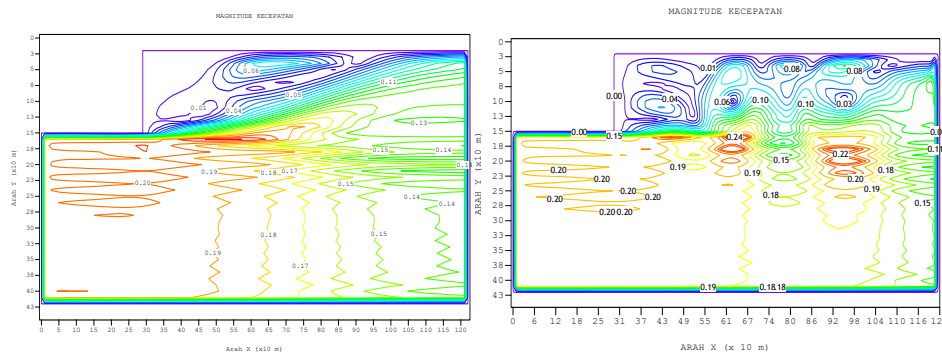
4.1.2 Kasus Ekspansi Satu Sisi



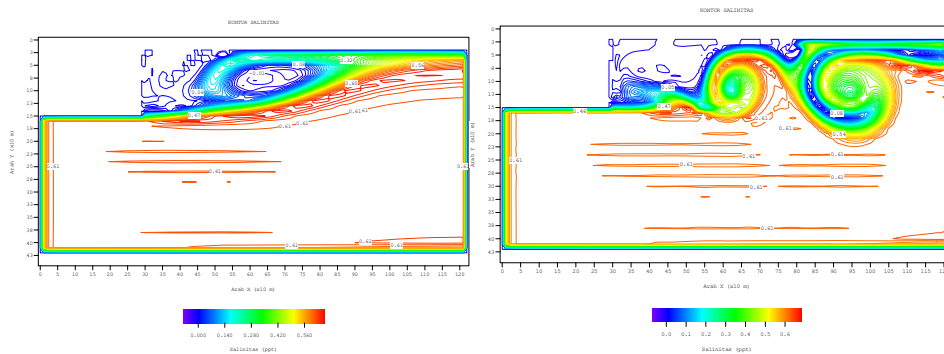
Gambar 4 Model saluran ekspansi tiba-tiba.



Gambar 5 Vektor kecepatan pada jam ke-7 untuk kasus non turbulen (a) dan turbulen (b).



Gambar 6 Kontur Kecepatan pada jam ke 7 untuk kasus non turbulen (a) dan turbulen (b).



Gambar 7 Kontur Salinitas pada jam ke -7 untuk kasus non turbulen (a) dan kasus turbulen (b).

Pada saluran ekspansi terlihat turbulensi terbentuk akibat ekspansi tiba-tiba pada dinding batas saluran. Pada model turbulen pola turbulensi menguat, terdapat peningkatan kecepatan, serta pembentukan pusaran-pusaran baru yang ukurannya lebih kecil terlihat lebih jelas dan stabil dibandingkan dengan hasil model non turbulen. Produksi turbulensi yang sangat tinggi (fenomena *bursting*) terjadi secara repetitif dan berfluktuasi pada zona resirkulasi dengan frekuensi tertentu. Fenomena *bursting* ini ditandai dengan terbentuknya vorteks dan terjadinya proses resirkulasi. Pusaran-pusaran yang besar terbentuk akibat kondisi batas (dalam hal ini dinding), sedangkan pusaran-pusaran yang kecil terbentuk oleh *viscous force* [14].

Pada aliran turbulen pemisahan struktur pola arus/kecepatan di tengah dan bagian sayap saluran terlihat sangat signifikan, begitu pula pusaran arus menjadi bentuk pola arus yang dominan di bagian sayap saluran. Pada aliran non turbulen pola pusaran arus di bagian sayap terlihat lebih lemah. Pola aliran sangat berpengaruh pada kecepatan penyebaran salinitas. Adanya turbulensi menyebabkan salinitas lebih cepat terdistribusi ke seluruh bagian saluran, jika dibandingkan dengan penyebaran salinitas pada aliran non turbulen. Hal ini disebabkan sifat difusif aliran turbulen yang mempercepat proses pencampuran (*mixing*) berbagai kuantitas, termasuk massa (konsentrasi).

5 Kesimpulan

Pada kasus ekspansi tiba-tiba, model turbulen Kappa-Epsilon mampu memberikan pola arus yang lebih baik dibandingkan model non turbulen. Hal ini terlihat dengan munculnya fenomena *bursting* dan resirkulasi yang tidak dapat dihasilkan oleh model non turbulen. Selain itu, model turbulen κ - ϵ telah dapat memberikan gambaran pola aliran yang lebih stabil pada aliran turbulen.

Selain itu model turbulen κ - ε juga memberikan pola penyebaran salinitas (konvektif dan difusif) yang lebih baik dan akurat dibandingkan model non turbulen.

Acknowledgement

Penelitian ini dilakukan dengan biaya DIKTI melalui program hibah Bersaing XII dan Hibah Pasca Sarjana P2M DIKTI 2007.

Daftar Pustaka

- [1] Adam, E. W., J.P. Johnston and J.K. Eaton, *Experiments on the structure of Turbulent Reattaching Flow*, ReportbMD-43, Thermosciences division-Dept of Mech Eng.-Stanford Univ., California, 1984.
- [2] M. Syahril B. K. And Claud Rey, *Visualization of Backward Facing Step Flows*, Proc. of Euromech 276, Dynamics of The Urban Atmosphere, Nantes, Perancis, 1992.
- [3] Bradshaw, P. and F.Y. Wong, *The Reattachment and Relaxation of Turbulent Shear Layer*, JFM, **52**, pp113-135, 1972.
- [4] Chandrasuda C. and Bradshaw, *Turbulent Structure of Reattaching Mixing Layer*, JFM, **110**, pp171-194, 1981.
- [5] Hunt, J.C.R., *Coherent Structures-Comments on Mechanism*, Seminar Proceeding of Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1989-03, 1989.
- [6] Hussain, A.K.M.F and W.C. Reynolds, *The Mechanism of Organized Wave in Turbulent Shear Flow*, JFM, **41**, part2, 241-258, 1973.
- [7] M. Syahril B.K, R.A. Rahayu, H. Kardana and M. Cahyono, *Numerical Simulation of Two Dimensional Turbulent Flow in Division Box of an Irrigation Channel Based on $\kappa - \varepsilon$ Model*, Proceeding of International conference on Fluid and Thermal Energy Conversion, Jakarta, December 10th-14th, 2006.
- [8] M. Syahril B.K, R.A. Rahayu, H. Kardana and M. Cahyono, *Development Of Turbulent $\kappa - \varepsilon$ Model for Assesing Water Quality Distribution in Reservoir*, Research Report, Asahi ResearchGrant, 2006.
- [9] M. Syahril B. K., M Cahyono & Eka O. N., *Development Study of Turbulent K-E Model for Recirculation flow I: Two Dimension Flow in Reservoir*, Proceeding ITB, 2004.
- [10] M. Syahril B. K., M. Cahyono, Hasan B & Noorsalam, *Optimalization on Water Distibution for Fishery Ponds in Indramayu*, research report, Dinas Perikanan TK II Indramayu-LP ITB, 1999.
- [11] Launder, B.E., and Spalding, D. B., *Lectures in Mathematical Models and Turbulence*, Academic Press Inc, New York, 1972.

- [12] Chapman, R.S, and Kuo, C.Y., Application of the two equation κ - ϵ Turbulence Model to a Two Dimensional, Steady, Free Surface Flow Problem with Separation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.5, 257-268, 1985.
- [13] Rastogi, A.K., and Rodi, W., Prediction of Heat and Mass Transfer in Open Channels, *J. Hydraulics Div., ASCE*, 104 (HY3), 397-420, 1978.
- [14] Rastogi, A.K., Private communication with W. Rodi (1980). Turbulence Models and Their Application in Hydraulics: a State of The art review, Presented by IAHR-Section on Fundamentals of Divison II: Experimental and Mathematical Fluid Dynamics, Delft, Netherland, P.50, 1978.
- [15] Abbott, M.B., Basco, D.R., *Computational Fluid Dynamics an Introduction for Engineers*, Longman Scientific & Technical, England, 1989.
- [16] Anderson JR, J.D., *Computational Fluid Dynamics, McGraw-Hill International Editions*, New York, 1995.
- [17] Blackwelder, R.F. and Haritonidis, *Scaling of Bursting Frequency in Turbulent boundary Layer*, *JFM*, **132**, 87-103, 1983
- [18] B. Mohammadi & O. Pironneau, *Analysis of The K-Epsilon Turbulence Model*, John Wiley & Sons, 1994.
- [19] Chapra, Steven C., *Surface Water Quality Modelling*, The McGraw-Hill Companies Inc., Si
- [20] Driver, D.M and H. Lee Seegmiller, *Features of Reattaching Turbulent Shear Layer in Divergent Channel*, *AIAA Journal*, **23**(21), 1985.
- [21] Falconer, R.A., Guiyi, Li, *Modelling Tidal Flows in an Island's Wake Using a Two Equation Turbulence Model*, *Journal of Fluid Mechanics*, 1992, 43-53.
- [22] Fletcher, C.A.J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics Volume I-II*, Second Edition, Springer-Verlag, London, 1990.
- [23] Hirt, C.W., *Turbulence Modelling*, Flow Science, Inc.
- [24] Hoffman, J.D., *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, Singapore, 1993.
- [25] Hussain, A.K.M.F and A.R. Clark, *On the Coherent Structure of the Axisymmetric Mixing Layer: a Flow Visualization Study*, *JFM*, **104**, 263-294, 1981.
- [26] Kim, J.J, *On the Structure of Wall Bounded Turbulent Flows*, *Physic of Fluids*, **26**(8), 2088-2092, 1983.
- [27] Launder, B.E., and Spalding, D. B., *The numerical Computation of Turbulent Flows*, *Computer Method in applied Mechanics and engineering*, **3**, 269-289, 1974.
- [28] M. Syahril Badri K., M Martono, Hang Tuah & S Legowo, *Experimental Study on Spectral Behaviour on Backward Facing Step Flows: Rough*

- Wall Boundary Layer Cases*, The Sixth Asian Congress of Fluid Mechanics, Singapore, pp. 1376-1379, 1995.
- [29] M. Syahril B. K. And Hang Tuah, *Backward Facing Step Flow: The Effect of Initial Condition on The reattachment of Turbulent Shear Layer*, Proc. of 1st International Symposium on Fluid Dynamic & Energy, Bali Indonesia, 1994.
- [30] Ni, H.Q., Shen, Y.M., Zhou, L.X., Duan, J.H., *Numerical Simulatoin of Multiple Circulating Flows Using A Depth-Averaged κ - ε Turbulence Model For The Entire Field*, The Sixth Asian Congress of Fluid Mechanics, Singapore, pp. 801-803, 1995.
- [31] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., *Numerical Recipes The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, New York, 1986.
- [32] Rijn, Leo C. van, *Principles of Fluid Flow and Surface Waves in River, Estuaries, Seas, and Oceans*, Aqua Publications, The Netherlands, 1990.
- [33] Strickland, J.H and Simpson, R.L, *Bursting Frequencies Obtained From Wall Shear Stress Fluctuations in a Turbulent Boundary Layer*, Physics Fluids, **18**(2), pp 306-308.
- [34] Westphal, R.V, J.P. Johnston and J.K. Eaton, *Experimental Study of Flow Reattachment in a Single Sided Sudden Expansion*, NASA Contractor Report 3765, 1984.
- [35] Wilcox, C. David, *Turbulence Modeling For CFD*, DCW Industries, Inc, California, 1994.
- [36] Younus, Muhammad, *Computation of Free-Surface Flow By Using Depth-Averaged κ - ε Turbulence Model*, Disertasi, Department of Civil and Environmental Engineering, Washington State University, 1993.