



Studi Pengembangan Model Turbulen κ - ϵ untuk Sirkulasi Arus I: Aliran Dua Dimensi pada Sebuah Tampungan Air

M. Syahril Badri Kusuma¹, M. Cahyono¹ & Eka Oktariantio²

Departemen Teknik Sipil FTSP ITB

Abstrak. Makalah ini menyajikan hasil studi pemodelan arus 2 dimensi pada sebuah tampungan dengan tujuan untuk melihat peningkatan akurasi model numerik tersebut dengan menggunakan model *depth averaged* κ - ϵ untuk memecahkan masalah turbulen. Model numerik dikembangkan berdasarkan metoda beda hingga, dimana untuk pemecahan persamaan hidrodinamik digunakan kombinasi metoda eksplisit Mac Cormack dengan metoda pemisahan operator splitting. Sebagai syarat batas digunakan metoda syarat batas cermin.

Studi banding hasil pemodelan dengan memanfaatkan hasil pengukuran di sebuah petak tambak dan hasil studi pemodelan dengan metoda lain menunjukkan adanya peningkatan akurasi dari hasil pemodelan tersebut dibanding dengan pemodelan non κ - ϵ , sehingga hasil pemodelan dengan metoda κ - ϵ lebih mendekati hasil pengukuran lapangan.

Kata-kata kunci: *turbulen; model κ - ϵ ; arus 2 dimensi; tampungan.*

Abstract. This paper present the results of the κ - ϵ model development for simulating two dimensions flow in a small reservoir. The study was aimed to see wether the turbulent component could be better accounted by using the κ - ϵ model. The numerical model was developed using finite difference method where hydrodynamic equation was solved by the combination of Mc Cormack and splitting methods. The mirror method is used as the boundary condition of the model.

Comparison study were done by using the field measurement result on fishery ponds and model results by other methods. Better agreement is found between field measurementst and model results due to the increasing accuracy in turbulent model prediction.

Keywords: *turbulent; κ - ϵ model; two dimensional flow; small reservoir.*

¹ Staf Pengajar Departemen Teknik Sipil ITB

² Asisten KBK TSA Departemen Teknik Sipil ITB

1 Pendahuluan

Pada perencanaan dan desain bangunan air, diperlukan analisis hidrodinamika yang pada prinsipnya menggambarkan interaksi antara aliran fluida dengan bangunan yang dilaluinya. Dalam hal ini, geometri bangunan air dan sifat aliran yang akan melaluinya menjadi sangat penting untuk diketahui. Analisis ini akan mudah dilakukan apabila pola aliran fluida disekitar bangunan air tersebut dapat diketahui. Karena berdasarkan pola aliran tersebutlah kemudian dapat ditentukan/diperhitungkan gaya-gaya fluida yang bekerja pada bangunan air tersebut dan kapasitas aliran tersebut dalam menyebarkan massa terlarut maupun tidak terlarut (sedimen) sepanjang pengalirannya.

Dalam mengevaluasi perilaku aliran tersebut, seringkali komponen turbulen diabaikan, padahal, pada kenyataannya, aliran air yang terjadi hampir seluruhnya bersifat turbulen (Fox and McDonald, 1992). Pengabaian aliran turbulen tersebut seringkali menimbulkan ketidakakurasian yang cukup signifikan dalam menentukan besaran rencana sehingga pada perencanaan bangunan air mempengaruhi stabilitas bangunan air yang bersangkutan, misalnya pier jembatan pada sebuah sungai, endsill dari sebuah spillway dll. Kompleksitas fenomena turbulen menyebabkan sulitnya aliran tersebut untuk dapat dihitung dengan menggunakan pendekatan analitik dalam menyelesaikan persamaan pengaturannya. Sementara itu, analisis aliran turbulen secara eksperimen sangat memakan waktu dan biaya yang besar. Oleh karena itu, analisis numerik dengan komputer menjadi suatu sarana yang lebih banyak dipilih untuk mencapai tujuan tersebut. Namun demikian, langkah eksperimen tetap diperlukan untuk proses kalibrasi dan verifikasi.

Perkembangan teknologi komputer saat ini, memungkinkan penurunan waktu dan biaya analisis serta meningkatkan akurasi dari analisis aliran turbulen dengan menggunakan metoda numerik. Sebagai contoh, komputasi aliran turbulen dalam pipa dengan bilangan Reynold 10^3 dalam sebuah pipa membutuhkan 10^{22} operasi numerik untuk menghasilkan bilangan Reynolds sebesar 10^3 dan waktu komputasi selama 32000 tahun bila menggunakan teknologi komputer pada era tahun tujuh puluhan (White, 1974), namun dengan teknologi komputer yang ada pada saat ini hanya dibutuhkan waktu komputasi selama beberapa hari.

Tidak seperti pada bidang aerodinamik dan hidrodinamik yang telah jauh lebih berkembang, aplikasi model aliran turbulen di bidang hidraulik masih banyak yang menggunakan penyederhanaan dalam memperhitungkan distribusi kecepatan aliran, dimana dalam hal ini digunakan konsep persamaan rata-rata (averaging equation) dan integrasi kedalaman (depth integration) pada persamaan pengatur aliran. Penggunaan konsep ini telah memberikan kontribusi yang banyak di bidang hidraulik.

Metoda penyelesaian masalah turbulen telah banyak dikembangkan antara lain yaitu metoda Zero equation model, One equation model, Two equation model, Reynolds stress model serta masih banyak lagi, namun demikian, karena tingkat akurasi yang diberikan cukup baik, metoda two equation κ - ε model model lebih banyak dikembangkan. Pada makalah ini, disajikan hasil studi untuk kasus aliran turbulen 2-dimensi pada sebuah tampungan dengan menggunakan metoda two equation κ - ε model model.

2 Persamaan Pengatur

Aliran turbulen merupakan aliran yang sangat kompleks karena didominasi oleh struktur eddy dengan fluktuasi yang sangat tinggi. Persamaan pengatur aliran ini dapat diturunkan dari persamaan kontinuitas dan momentum yang akan menghasilkan persamaan Navier-Stokes. Penurunan persamaan Navier-Stokes untuk aliran turbulen dua dimensi tak mampu mampat dalam bentuk depth-averaged telah banyak dilakukan oleh para peneliti terdahulu dan hasilnya disajikan pada subbab dibawah ini. Beberapa anggapan yang dipakai dalam melakukan penurunan persamaan pengatur tersebut adalah sbb:

- Aliran tak mampu mampat (*incompressible*).
- *Viscous stress* dan *Gaya Coriolis* diabaikan
- Aliran tak berputar (*irrotational*).
- Kecepatan aliran yang ditinjau adalah kecepatan rata-rata.
- Aliran adalah dua dimensi (arah -x dan arah-y)

2.1 Persamaan Kontinuitas & Momentum

Persamaan rata-rata kontinuitas untuk tiga dimensi dapat dituliskan dalam bentuk tensor sbb.:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

Persamaan rata-rata momentum untuk tiga dimensi dapat dituliskan dalam bentuk tensor sbb.:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j} \right] \quad (2)$$

dimana μ = viskositas, \bar{u}_i = time-average velocity dalam arah sumbu i, $\overline{u_i u_j}$ = komponen tegangan turbulen Reynold. Persamaan persamaan rata-rata kontinuitas dan momentum dalam bentuk Depth-Averaged Velocity diperoleh dengan melakukan integrasi persamaan rata-rata kontinuitas dan momentum di atas terhadap kedalaman dengan menggunakan metode "Leibnitz Rule"

sehingga akan didapatkan persamaan pengatur aliran dua dimensi tak mampu mampat sbb.:

- Persamaan Kontinuitas

$$\left[\frac{\partial H}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial(UH)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial(VH)}{\partial y} \right] = 0 \quad (3)$$

- Persamaan Momentum

Arah x

$$\frac{\partial(hU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hU^2 + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial(hUV)}{\partial y} = ghS_{0x} - \frac{1}{\rho} \tau_{bx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{sx} \quad (4)$$

Arah y

$$\frac{\partial(hV)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(hV^2 + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial(hUV)}{\partial x} = ghS_{0y} - \frac{1}{\rho} \tau_{by} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{sy} \quad (5)$$

dimana

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'u'} \quad (6)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \rho \overline{v'v'} \quad (7)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} \quad (8)$$

τ_{bx} dan τ_{sx} masing-masing merupakan tegangan dasar saluran dan tegangan permukaan air, sedangkan S_{0x} dan S_{0y} masing-masing merupakan kemiringan energi pada arah x dan y.

2.2 Persamaan Model Turbulen K - ϵ

Persamaan (2) sangat kompleks dan untuk penyelesaiannya membutuhkan Closure Problem dari suku "Reynold Stress" yang dalam hal ini dapat didekati dengan menggunakan pendekatan Boussinesq Eddy Viscosity sbb.:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \hat{\nu}_t \left[\frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(U_j)}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \hat{k} h \delta_{ij} \quad (9)$$

dimana

δ_{ij} = delta Kronecker

$$\delta_{ij} \begin{cases} i = j, \delta = 1 \\ i \neq j, \delta = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Dari analisis dimensional, didapatkan bahwa eddy viscosity (v_t) adalah sebanding dengan karakteristik skala kecepatan (v) dan skala panjang (ℓ), sebagai berikut : $v_t \approx v\ell$.

Launder dan Spalding (1974) telah mengembangkan model turbulen κ - ε untuk menyelesaikan persamaan Reynold Stress dengan menggunakan dua persamaan tambahan yaitu Turbulence Kinetic-Energy Equation dan Turbulence Energy Dissipation Rate Equation. Namun, persamaan tersebut hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan closure-problem dari persamaan Reynolds stress dalam bentuk depth-averaged setelah dimodifikasi dalam bentuk depth integrated. Dalam hal ini, Chapman and Kuo (1985) telah memodifikasi model Rastogi and Rodi (1978) dalam bentuk persamaan yang lebih konsisten dengan persamaan kontinuitas depth averaged dan persamaan momentum depth averaged sehingga diperoleh hubungan depth-integrated Reynolds stresses dengan depth integrated strain rates.

Pemodelan pada makalah ini menggunakan model Turbulen κ - ε yang diperoleh dari pendekatan Chapman and Kuo (1985) tersebut di atas sehingga diperoleh persamaan energi kinetis turbulen dan laju disipasi energi turbulen yang berlaku untuk persamaan depth averaged sbb.:

- Persamaan K

$$\frac{\partial(h\hat{k})}{\partial t} + \frac{\partial(hU\hat{k})}{\partial x} + \frac{\partial(hV\hat{k})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\hat{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial(h\hat{k})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\hat{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial(h\hat{k})}{\partial y} \right] + P_h + P_k - \hat{\varepsilon}h \quad (11)$$

- Persamaan ε

$$\frac{\partial(h\hat{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(hU\hat{\varepsilon})}{\partial x} + \frac{\partial(hV\hat{\varepsilon})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\hat{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(h\hat{\varepsilon})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\hat{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(h\hat{\varepsilon})}{\partial y} \right] + \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{k}} (C_1 P_h - C_2 \hat{\varepsilon}h) + p_\varepsilon \quad (12)$$

dimana :

$$P_h = \frac{\hat{v}_t}{h} \left\{ 2 \left[\frac{\partial(hU)}{\partial x} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial(hV)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right]^2 \right\} \quad (13)$$

$$P_k = \frac{g}{C^2} q^3, P_\varepsilon = \frac{C_2 C_\mu^{1/2} g^{5/4} q^4}{h D^{1/2} C^{5/2}}, q = \sqrt{U^2 + V^2} \quad (14)$$

$\hat{\nu}_t$ adalah Viskositas Turbulen untuk depth averaged sbb.:

$$\hat{\nu}_t = C_\mu \frac{\hat{k}^2}{\hat{\varepsilon}} \quad (15)$$

dan h = hedalaman aliran. Besaran koefisien-koefisien pada persamaan tersebut adalah : $C_\mu = 0.09$, $C_1 = 1.44$, $C_2 = 1.92$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$ dan $D = 0.075$

2.3 Penulisan ulang persamaan

Persamaan tersebut diatas dapat ditulis dalam persamaan vektor :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + S \quad (16)$$

E , F , E_v dan F_v dinamakan Flux Vectors. Q dan S merupakan Dependent Variables dan Source Terms. Definisi masing-masing suku adalah sbb.:

$$Q = \begin{bmatrix} h \\ hU \\ hV \\ h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$E = \begin{bmatrix} hU \\ hU^2 + \frac{gh^2}{2} \\ hU V \\ hU \hat{k} \\ hU \hat{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_2 \\ \frac{Q_2^2 + gQ_1^2}{Q_1} \\ \frac{Q_2 Q_3}{Q_1} \\ \frac{Q_2 Q_4}{Q_1} \\ \frac{Q_2 Q_5}{Q_1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$F = \begin{bmatrix} hV \\ hU V \\ hV^2 + \frac{gh^2}{2} \\ hU \hat{k} \\ hU \hat{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_3 \\ \frac{Q_2 Q_3}{Q_1} \\ \frac{Q_3^2 + gQ_1^2}{Q_1} \\ \frac{Q_3 Q_4}{Q_1} \\ \frac{Q_3 Q_5}{Q_1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{hT_{xy}}{\rho} \\ \frac{hT_{yx}}{\rho} \\ \frac{\bar{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial h \hat{k}}{\partial x} \\ \frac{\bar{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial h \hat{\varepsilon}}{\partial x} \end{bmatrix} = \hat{v}_t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \hat{v}_t \frac{\partial (hU)}{\partial x} - \frac{2}{3} h \hat{k} \\ \left[\frac{\partial (hU)}{\partial y} + \frac{\partial (hV)}{\partial x} \right] \\ \frac{\hat{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial (h \hat{k})}{\partial x} \\ \frac{\hat{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial (h \hat{\varepsilon})}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \frac{C_\mu Q_4^2}{Q_1 Q_5} \frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{2}{3} Q_4 \\ \frac{C_\mu Q_4^2}{Q_1 Q_5} \left[\frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial Q_3}{\partial x} \right] \\ \frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{Q_4^2}{Q_1 Q_5} \frac{\partial Q_4}{\partial x} \\ \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{Q_4^2}{Q_1 Q_5} \frac{\partial Q_5}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{hT_{xy}}{\rho} \\ \frac{hT_{yx}}{\rho} \\ \frac{\bar{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial h \hat{k}}{\partial y} \\ \frac{\bar{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial h \hat{\varepsilon}}{\partial y} \end{bmatrix} = \hat{v}_t \begin{bmatrix} 0 \\ \left[\frac{\partial (hU)}{\partial y} + \frac{\partial (hV)}{\partial x} \right] \\ 2 \hat{v}_t \frac{\partial (hV)}{\partial y} - \frac{2}{3} h \hat{k} \\ \frac{\hat{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial (h \hat{k})}{\partial y} \\ \frac{\hat{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial (h \hat{\varepsilon})}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_\mu Q_4^2}{Q_1 Q_5} \left[\frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial Q_3}{\partial x} \right] \\ 2 \frac{C_\mu Q_4^2}{Q_1 Q_5} \frac{\partial Q_3}{\partial y} - \frac{2}{3} Q_4 \\ \frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{Q_4^2}{Q_1 Q_5} \frac{\partial Q_4}{\partial y} \\ \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{Q_4^2}{Q_1 Q_5} \frac{\partial Q_5}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ ghS_x - \frac{\eta_x}{\rho} \\ ghS_x - \frac{\eta_y}{\rho} \\ P_h + P_k - h\hat{\varepsilon} \\ \frac{\hat{\varepsilon}}{k} (C_1 P_h - C_2 h\hat{\varepsilon}) + P_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ghS_x - \frac{g}{C^2} U \sqrt{U^2 + V^2} \\ ghS_y - \frac{g}{C^2} \sqrt{U^2 + V^2} \\ \frac{\hat{v}_t}{h} \left\{ 2 \left[\frac{\partial (hU)}{\partial x} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial (hV)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial (hU)}{\partial y} + \frac{\partial (hV)}{\partial x} \right]^2 \right\} + \frac{g}{C^2} (U^2 + V^2)^{3/2} - h\hat{\varepsilon} \\ \frac{\hat{\varepsilon}}{k} \left\{ \frac{C_{1v}}{h} \left[2 \left(\frac{\partial (hU)}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial (hV)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial (hU)}{\partial y} + \frac{\partial (hV)}{\partial x} \right)^2 \right] - C_2 h\hat{\varepsilon} \right\} + \frac{C_2 C_\mu g^{5/4}}{hD^{1/2} C^{5/2}} (U^2 + V^2)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ gQ_1 S_x - \frac{g}{C^2} \frac{Q_2}{Q_1^2} \sqrt{Q_2^2 + Q_3^2} \\ gQ_1 S_y - \frac{g}{C^2} \frac{Q_3}{Q_1^2} \sqrt{Q_2^2 + Q_3^2} \\ \frac{C_\mu Q_4^2}{Q_1^2 Q_5} \left[2 \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial Q_3}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial Q_3}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{g}{C^2 Q_1^3} (Q_2^2 + Q_3^2)^{3/2} - Q_5 \\ \frac{C_1 C_\mu Q_4}{Q_1^2} \left[2 \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial Q_3}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial Q_3}{\partial x} \right)^2 \right] - C_2 \frac{Q_5^2}{Q_4} + \frac{C_2 C_\mu g^{5/4}}{Q_1^3 D^{1/2} C^{5/2}} (Q_2^2 + Q_3^2)^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Dalam bentuk matriks persamaan tersebut diatas dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ hU \\ hV \\ h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} hU \\ hU^2 + \frac{gh^2}{2} \\ hUV \\ hU\hat{k} \\ hU\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} hV \\ hUV \\ hV^2 + \frac{gh^2}{2} \\ hV\hat{k} \\ hV\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h\tau_{xy}}{\rho} \\ \frac{h\tau_{yx}}{\rho} \\ \frac{\bar{v}_i}{\sigma_k} \frac{\partial h\hat{k}}{\partial x} \\ \frac{\bar{v}_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial h\hat{\varepsilon}}{\partial x} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h\tau_{xy}}{\rho} \\ \frac{h\tau_{yx}}{\rho} \\ \frac{\bar{v}_i}{\sigma_k} \frac{\partial h\hat{k}}{\partial y} \\ \frac{\bar{v}_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial h\hat{\varepsilon}}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{ox} - S_{Rk}) + \frac{\tau_{xy}}{\rho} \\ gh(S_{oy} - S_{Ry}) + \frac{\tau_{yx}}{\rho} \\ P_h + P_k - h\hat{\varepsilon} \\ \frac{\hat{\varepsilon}}{k}(C_1 P_h - C_2 h\hat{\varepsilon}) + P \end{bmatrix} \quad (23)$$

Penulisan dalam uraian suku turbulen

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ hU \\ hV \\ h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} hU \\ hU^2 + \frac{gh^2}{2} \\ hUV \\ hU\hat{k} \\ hU\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} hV \\ hUV \\ hV^2 + \frac{gh^2}{2} \\ hV\hat{k} \\ hV\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ 2\hat{v}_t \frac{\partial(hU)}{\partial x} - \frac{2}{3} h\hat{k} \\ \hat{v}_t \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right] \\ \frac{\bar{v}_i}{\sigma_k} \frac{\partial(h\hat{k})}{\partial x} \\ \frac{\bar{v}_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(h\hat{\varepsilon})}{\partial x} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_t \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right] \\ 2\hat{v}_t \frac{\partial(hV)}{\partial y} - \frac{2}{3} h\hat{k} \\ \frac{\bar{v}_i}{\sigma_k} \frac{\partial(h\hat{k})}{\partial y} \\ \frac{\bar{v}_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(h\hat{\varepsilon})}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ gh S_{ox} - \frac{g}{C^2} U \sqrt{U^2 + V^2} + \frac{\rho_0 C_W W}{\rho} \\ gh S_{oy} - \frac{g}{C^2} V \sqrt{U^2 + V^2} + \frac{\rho_0 C_W V}{\rho} \\ \frac{\bar{v}_i}{h} \left[2 \left[\frac{\partial(hU)}{\partial x} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial(hV)}{\partial y} \right]^2 + x \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right]^2 \right] + \frac{g}{C^2} (U^2 + V^2)^{3/2} - h\hat{\varepsilon} \\ \frac{\hat{\varepsilon}}{k} \left[\frac{C_1 \bar{v}_i}{h} \left[2 \left(\frac{\partial(hU)}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial(hV)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right)^2 \right] - C_2 h\hat{\varepsilon} \right] + \frac{C_2 C_g g^{5/4}}{h D^{3/2} C^{6/2}} (U^2 + V^2)^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

dimana :

g = percepatan gravitasi

S_{ox}, S_{oy} = kemiringan dasar pada sumbu x dan y

Sf_x, Sf_y = kemiringan energi arah sumbu x dan y

$$C = \text{Chezy} = \frac{R^{1/6}}{n} \quad (24)$$

$$Sf_x = \frac{q_x \sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{C^2 H^3} \quad \text{dan} \quad Sf_y = \frac{q_y \sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{C^2 H^3} \quad (25)$$

dimana q_x = Uh, dan q_y = Vh. Tegangan geser pada dasar didekati dengan rumus sebagai berikut:

$$\tau_{bx} = \frac{\rho g}{C^2} U(U^2 + V^2)^{1/2} \tag{26}$$

$$\tau_{by} = \frac{\rho g}{C^2} V(U^2 + V^2)^{1/2} \tag{27}$$

Sedangkan tegangan geser pada permukaan bebas dapat dinyatakan sebagai tegangan yang ditimbulkan oleh angin dan dinyatakan sbb.:

$$\frac{\tau_{zx}(\eta)}{\rho} = \frac{\rho_a C^* W_x W}{\rho} = \frac{\tau_{sx}}{\rho} \tag{28}$$

$$\frac{\tau_{zy}(\eta)}{\rho} = \frac{\rho_a C^* W_y W}{\rho} = \frac{\tau_{sy}}{\rho} \tag{29}$$

2.4 Penyelesaian Numerik

Penyelesaian numerik dilakukan masing-masing terhadap persamaan kontinuitas, momentum dan turbulen seperti yang disajikan pada uraian di bawah ini.

2.4.1 Persamaan Kontinuitas & Momentum

Penyelesaian splitting dilakukan dengan memodifikasi persamaan sehingga diperoleh persamaan hidrodinamika sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ hU \\ hV \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} hU \\ hU^2 + \frac{gh^2}{2} \\ hUV \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} hV \\ hV^2 + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hV \\ hUV \\ hV^2 + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix} \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ 2\hat{v}_t \frac{\partial(hU)}{\partial x} - \frac{2}{3} h\hat{k} \\ \hat{v}_t \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right] \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_t \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right] \\ 2\hat{v}_t \frac{\partial(hV)}{\partial y} - \frac{2}{3} h\hat{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ gh S_{ox} - \frac{g}{C^2} U \sqrt{U^2 + V^2} + \frac{\rho_0 C^* W_x W}{\rho} \\ gh S_{oy} - \frac{g}{C^2} V \sqrt{U^2 + V^2} + \frac{\rho_0 C^* W_y W}{\rho} \end{bmatrix} \tag{30} \end{aligned}$$

Penyelesaian dengan cara splitting dilakukan dengan terlebih dahulu melakukan pemisahan terhadap persamaan diferensial hidrodinamik yang akan diselesaikan dengan skema berikut:

$$F^{n+2} = \left[(L_x L_y L_{xx} L_{yy} L_s) \bullet (L_s L_{yy} L_{xx} L_y L_x) \right] F^n \tag{31}$$

dimana $F = [H, UH, VH]^T$.

Skema perhitungan beda hingga yang dipakai adalah skema Mc Cormack :

I. L_x adalah penyelesaian diferensial arah x, yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} Uh \\ UUh \\ UVh \end{bmatrix} + g \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ z+h \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (32)$$

Penyelesaian persamaan arah X (32) adalah sebagai berikut :

• Langkah Prediktor

$$\begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^* = \begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} Uh \\ UUh \\ UVh \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} Uh \\ UUh \\ UVh \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} - gh_{i,j}^n \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ Z+h \\ 0 \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} 0 \\ Z+h \\ 0 \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} \quad (33)$$

• Langkah Korektor

$$\begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^{**} = \begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} Uh \\ UUh \\ UVh \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} Uh \\ UUh \\ UVh \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} - gh_{i,j}^* \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ Z+h \\ 0 \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} 0 \\ Z+h \\ 0 \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} \quad (34)$$

• Hasil akhir

$$\begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^n + \begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^{**} \right\} \quad (35)$$

II. L_y adalah penyelesaian diferensial arah y, yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} Vh \\ UVh \\ VVh \end{bmatrix} + g \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z+h \end{bmatrix} = 0 \quad (36)$$

Penyelesaian persamaan arah Y (36) adalah sebagai berikut :

• Langkah Prediktor

$$\begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^* = \begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} Vh \\ UVh \\ VVh \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} Vh \\ UVh \\ VVh \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} - gh_{i,j}^n \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z+h \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z+h \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} \quad (37)$$

- Langkah Korektor

$$\begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^{**} = \begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} Vh \\ UVh \\ VVh \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} Vh \\ UVh \\ VVh \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} - gh_{i,j}^* \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z+h \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z+h \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} \quad (38)$$

- Hasil akhir

$$\begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^n + \begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^{**} \right\} \quad (39)$$

III. L_{xx} adalah penyelesaian diferensial untuk turunan kedua arah x, yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ hU \\ hV \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ 2\hat{v}_t \frac{\partial(hU)}{\partial x} - \frac{2}{3} h\hat{k} \\ \hat{v}_t \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right] \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} h \\ hU \\ hV \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \begin{bmatrix} h \\ hU \\ hV \end{bmatrix}_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ 2\hat{v}_t \frac{\partial(hU)}{\partial x} - \frac{2}{3} h\hat{k} \\ \hat{v}_t \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right] \end{bmatrix} \quad (41)$$

IV. L_{yy} adalah penyelesaian diferensial untuk turunan kedua arah y, yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ hU \\ hV \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_t \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right] \\ 2\hat{v}_t \frac{\partial(hV)}{\partial y} - \frac{2}{3} h\hat{k} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\begin{bmatrix} h \\ hU \\ hV \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \begin{bmatrix} h \\ hU \\ hV \end{bmatrix}_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\hat{c}} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_t \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right] \\ 2\hat{v}_t \frac{\partial(hV)}{\partial y} - \frac{2}{3} h \hat{k} \end{bmatrix} \quad (43)$$

V. L_s adalah penyelesaian persamaan reaksi, yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} u \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \frac{U\sqrt{U^2+V^2}}{C^2 h} + \frac{\tau_{sx}}{\rho} \\ -g \frac{V\sqrt{U^2+V^2}}{C^2 h} + \frac{\tau_{sy}}{\rho} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Penyelesaian persamaan reaksi dilakukan dengan metode Euler, yaitu:

$$\begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \begin{bmatrix} h \\ Uh \\ Vh \end{bmatrix}_{i,j}^n + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \frac{U\sqrt{U^2+V^2}}{C^2} + \frac{\tau_{sx}}{\rho} \\ -g \frac{V\sqrt{U^2+V^2}}{C^2} + \frac{\tau_{sy}}{\rho} \end{bmatrix}_{i,j}^n \quad (45)$$

2.4.2 Persamaan κ & ε

Persamaan κ - ε dapat ditulis kembali dalam bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} hU\hat{k} \\ hU\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} hV\hat{k} \\ hV\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} &= \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \bar{v}_t \frac{\partial(h\hat{k})}{\partial x} \\ \bar{v}_t \frac{\partial(h\hat{\varepsilon})}{\partial x} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \bar{v}_t \frac{\partial(h\hat{k})}{\partial y} \\ \bar{v}_t \frac{\partial(h\hat{\varepsilon})}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &+ \left[\begin{aligned} &\frac{\bar{v}_t}{h} \left\{ 2 \left[\frac{\partial(hU)}{\partial x} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial(hV)}{\partial y} \right]^2 + x \left[\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right]^2 \right\} + \frac{g}{C^2} (U^2 + V^2)^{3/2} - h\hat{\varepsilon} \\ &+ \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{k}} \left\{ C_1 \bar{v}_t \left[2 \left(\frac{\partial(hU)}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial(hV)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(hU)}{\partial y} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right)^2 \right] - C_2 h\hat{\varepsilon} \right\} + \frac{C_2 C_\mu g^{5/4}}{hD^{1/2} C^{5/2}} (U^2 + V^2)^2 \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

Penyelesaian persamaan κ - ε dengan Teknik Splitting serta skema perhitungan beda hingga Mc Cormack adalah sebagai berikut :

$$G^{n+2} = \left[(L_x L_y L_{xx} L_{yy} L_s) \bullet (L_s L_{yy} L_{xx} L_y L_x) \right] G^n \quad (47)$$

dimana $G = [h\hat{k}, h\hat{\varepsilon}]^T$.

I. L_x adalah penyelesaian diferensial arah x, yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} hU\hat{k} \\ hU\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} = 0 \quad (48)$$

Penyelesaian persamaan arah X (48) adalah sebagai berikut :

- Langkah Prediktor

$$\begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^* = \begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} hU\hat{k} \\ hU\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} hU\hat{k} \\ hU\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} \quad (49)$$

- Langkah Korektor

$$\begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^{**} = \begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{bmatrix} hU\hat{k} \\ hU\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i+1,j}^* - \begin{bmatrix} hU\hat{k} \\ hU\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} \quad (50)$$

- Hasil akhir

$$\begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n + \begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^{**} \right\} \quad (51)$$

II. L_y adalah penyelesaian diferensial arah y, yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} hV\hat{k} \\ hV\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} = 0 \quad (52)$$

Penyelesaian persamaan arah y (52) adalah sebagai berikut :

- Langkah Prediktor

$$\begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^* = \begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} hV\hat{k} \\ hV\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n - \begin{bmatrix} hV\hat{k} \\ hV\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j-1}^n \right\} \quad (53)$$

- Langkah Korektor

$$\begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^{**} = \begin{bmatrix} h\hat{k} \\ h\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \begin{bmatrix} hV\hat{k} \\ hV\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j+1}^* - \begin{bmatrix} hV\hat{k} \\ hV\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^* \right\} \quad (54)$$

- Hasil akhir

$$\begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n + \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^{**} \right\} \quad (55)$$

III. L_{xx} adalah penyelesaian diferensial untuk turunan kedua arah x, yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \bar{v}_t \frac{\partial(\hat{h}\hat{k})}{\sigma_k \partial x} \\ \bar{v}_t \frac{\partial(\hat{h}\hat{\varepsilon})}{\sigma_\varepsilon \partial x} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Penyelesaian persamaan (56) adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^* = \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} v_t / \sigma_k \\ v_t / \sigma_\varepsilon \end{bmatrix} + x \left\{ \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i+1,j}^n - 2 \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n + \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} \quad (57)$$

IV. L_{yy} adalah penyelesaian diferensial untuk turunan kedua arah y, yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \bar{v}_t \frac{\partial(\hat{h}\hat{k})}{\sigma_k \partial y} \\ \bar{v}_t \frac{\partial(\hat{h}\hat{\varepsilon})}{\sigma_\varepsilon \partial y} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Penyelesaian persamaan (58) adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^* = \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \begin{bmatrix} v_t / \sigma_k \\ v_t / \sigma_\varepsilon \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i+1,j}^n - 2 \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n + \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i-1,j}^n \right\} \quad (58)$$

V. L_s adalah penyelesaian persamaan reaksi, yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{l} \frac{\bar{v}_t}{h} \left\{ 2 \left[\frac{\partial(\hat{h}U)}{\partial x} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial(\hat{h}V)}{\partial y} \right]^2 + x \left[\frac{\partial(\hat{h}U)}{\partial y} + \frac{\partial(\hat{h}V)}{\partial x} \right]^2 \right\} \\ \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{k}} C_1 v_t \left[2 \left(\frac{\partial(\hat{h}U)}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial(\hat{h}V)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\hat{h}U)}{\partial y} + \frac{\partial(\hat{h}V)}{\partial x} \right)^2 \right] \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \frac{g}{C^2} (U^2 + V^2)^{3/2} - \hat{h}\hat{\varepsilon} \\ \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{k}} \left\{ -C_2 \hat{h}\hat{\varepsilon} + \frac{C_2 C_\mu g^{5/4}}{h D^{1/2} C^{5/2}} (U^2 + V^2)^2 \right\} \end{array} \right] \quad (59)$$

Penyelesaian persamaan reaksi dengan metode Euler, yaitu:

$$\begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^{n+1} = \begin{bmatrix} \hat{h}\hat{k} \\ \hat{h}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}_{i,j}^n + \Delta t \left[\begin{array}{l} \frac{\bar{v}_t}{h} \left\{ 2 \left[\frac{\partial(\hat{h}U)}{\partial x} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial(\hat{h}V)}{\partial y} \right]^2 + x \left[\frac{\partial(\hat{h}U)}{\partial y} + \frac{\partial(\hat{h}V)}{\partial x} \right]^2 \right\} \\ \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{k}} C_1 v_t \left[2 \left(\frac{\partial(\hat{h}U)}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial(\hat{h}V)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\hat{h}U)}{\partial y} + \frac{\partial(\hat{h}V)}{\partial x} \right)^2 \right] \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{k} \\ \hat{\varepsilon} \end{bmatrix}^{n+1, j+1} + \Delta t \begin{bmatrix} \frac{g}{C^2} (U^2 + V^2)^{3/2} - h \hat{\varepsilon} \\ \hat{\varepsilon} \left\{ -C_2 h \hat{\varepsilon} \right\} + \frac{C_2 C_\mu g^{5/4}}{h D^{1/2} C^{5/2}} (U^2 + V^2)^2 \end{bmatrix} \quad (60)$$

2.4.3 Syarat Batas

Syarat batas antara air dengan darat dihitung dengan pendekatan metoda cermin. Persamaan yang digunakan adalah sebagai berikut :

1. Prediktor

$$\text{Arah } -x : u_{i,j}^{n+1} h_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n h_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n h_{i+1,j}^n \quad (61)$$

$$\text{Arah } -y : v_{i,j}^{n+1} h_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n h_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n h_{i,j+1}^n \quad (62)$$

2. Korektor

$$\text{Arah } -x : u_{i,j}^{n+1} h_{i,j}^{n+1} = -u_{i-1,j}^n h_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n h_{i,j}^n \quad (63)$$

$$\text{Arah } -y : v_{i,j}^{n+1} h_{i,j}^{n+1} = -v_{i,j-1}^n h_{i,j-1}^n - v_{i,j}^n h_{i,j}^n \quad (64)$$

3 Simulasi dan Hasil

3.1 Skenario Simulasi

Simulasi dilakukan untuk dua tipe persamaan hidrodinamika sebagai berikut :

1. Simulasi tanpa memasukkan suku-suku turbulen.
2. Simulasi dengan memasukkan suku-suku turbulen.

Persamaan hidrodinamik diuji pada 8 macam bentuk problem seperti ditampilkan pada Gambar 1 sampai dengan 8 seperti diberikan pada lampiran. Pemodelan tersebut adalah sebagai berikut :

1. Problem pada Gambar 6, 7 dan 8 dilakukan untuk menguji program dalam hal konservasi massa.
2. Gambar 1 sampai dengan 5 dilakukan untuk melihat pengaruh penerapan model turbulen pada akurasi hasil model pada kasus aliran akibat pemasangan kincir di beberapa titik dalam kolam/tampungan.
3. Masing-masing problem disimulasikan untuk data masukan sebagai berikut

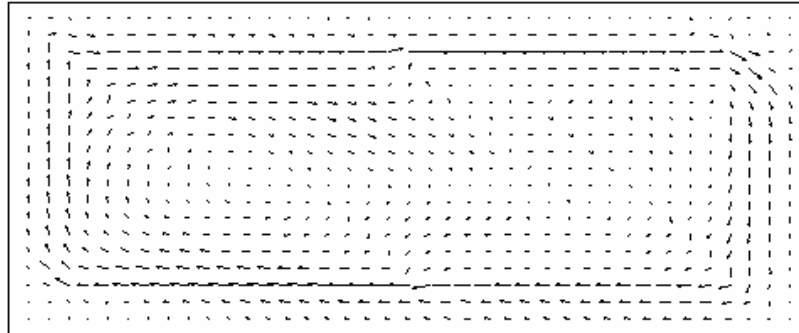
| Jenis Test | DX (m) | DX (m) | DT (dt) | Waktu Simulasi |
|---------------|--------|--------|---------|----------------|
| Saluran Lurus | 20 | 20 | 1 | 3 jam |
| Belokan | 20 | 20 | 1 | 3 jam |
| Bulatan | 20 | 20 | 1 | 3 jam |
| Kincir | 20 | 20 | 1 | 5 jam |

Tabel 1 Data-data masukan test.

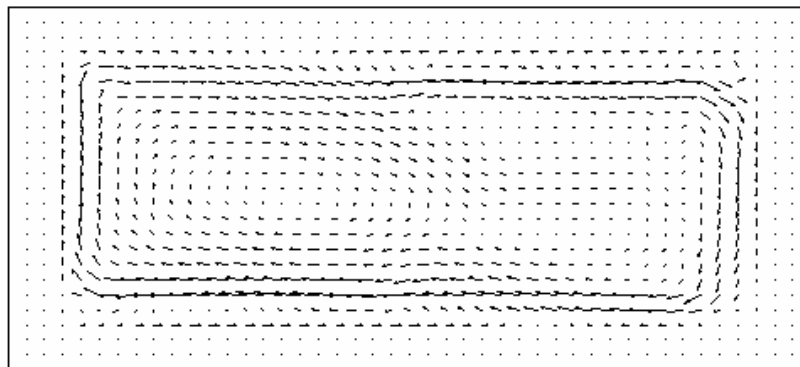
Adapun sketsa hasil simulasi dari masing-masing problem dapat dilihat pada uraian dalam subbab dibawah ini.

3.2 Hasil Simulasi

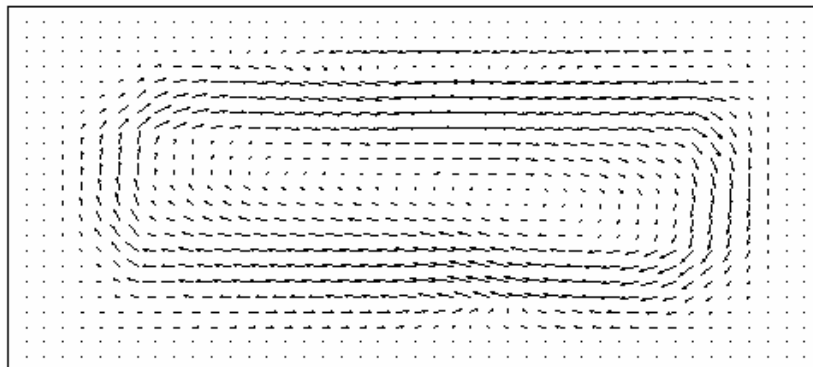
Hasil simulasi untuk masing-masing problem dapat dilihat sebagai berikut :



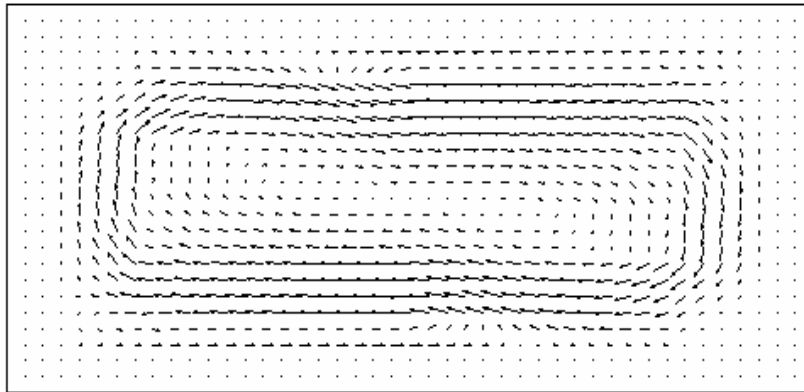
Gambar 1 Pola aliran kasus 1 NonTurbulen.



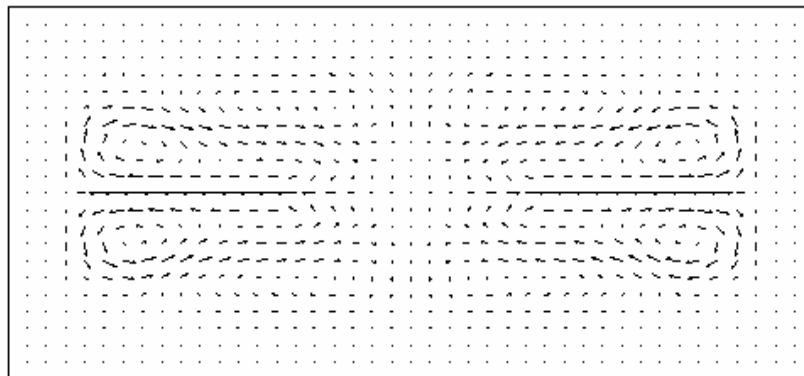
Gambar 2 Pola aliran kasus 1 Turbulen.



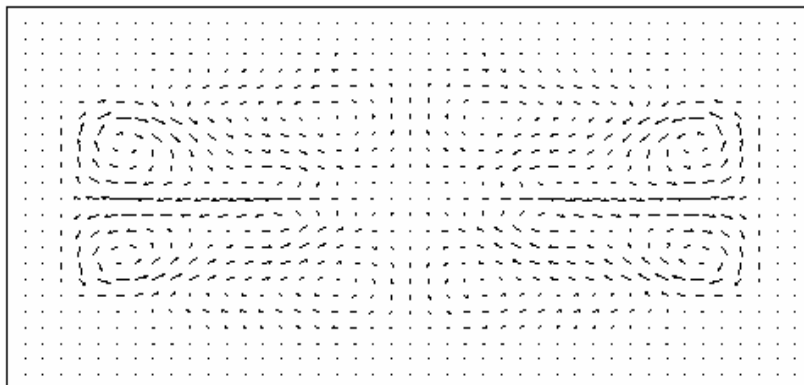
Gambar 3 Pola aliran kasus 2 NonTurbulen.



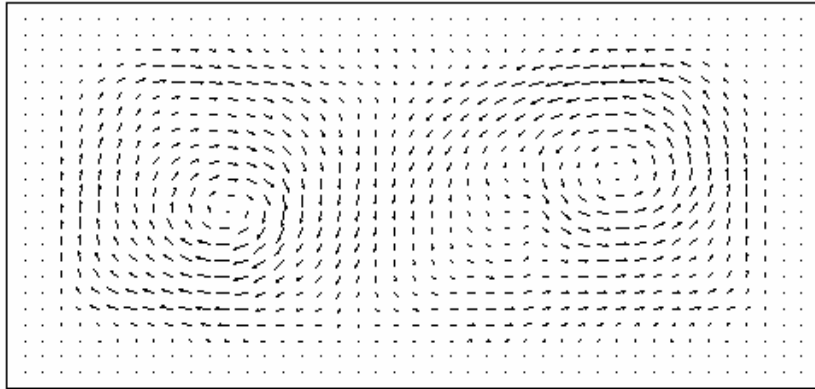
Gambar 4 Pola aliran kasus 2 Turbulen.



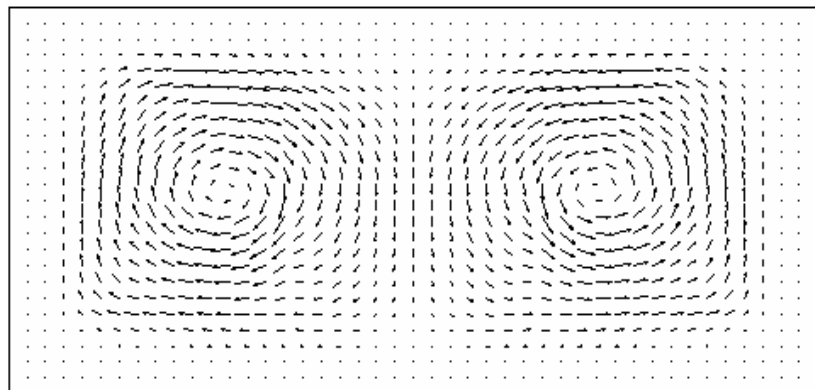
Gambar 5 Pola aliran kasus 3 NonTurbulen.



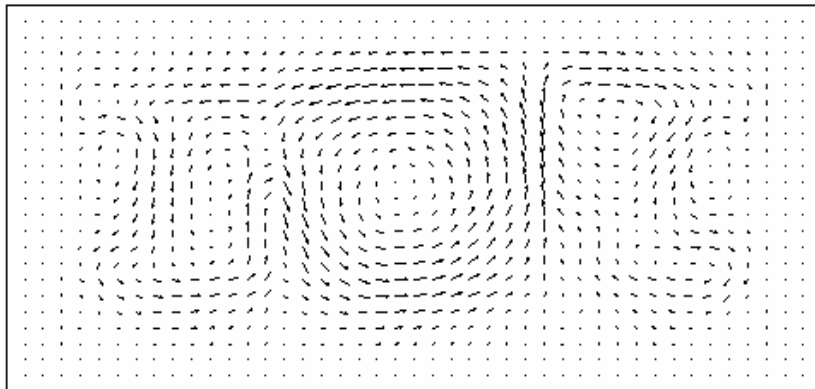
Gambar 6 Pola aliran kasus 3 Turbulen.



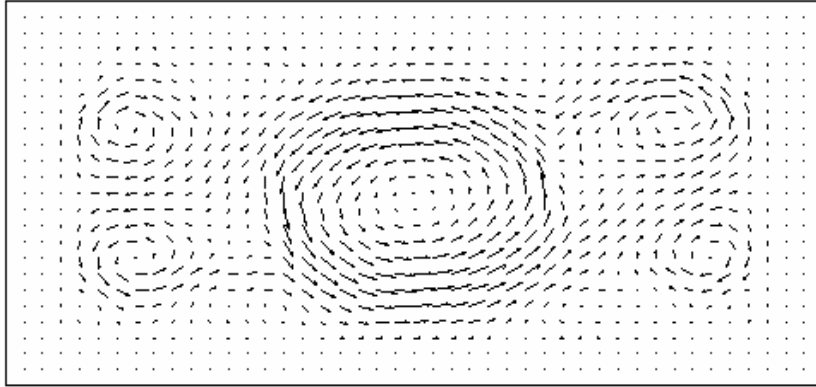
Gambar 7 Pola aliran kasus 4 NonTurbulen.



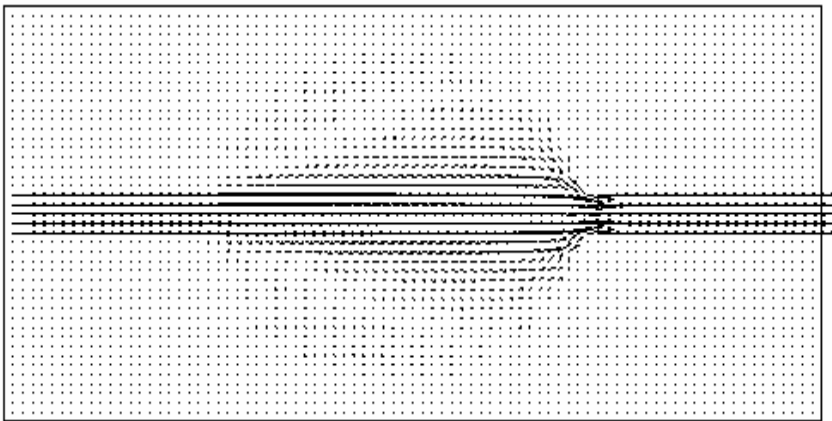
Gambar 8 Pola aliran kasus 4 Turbulen.



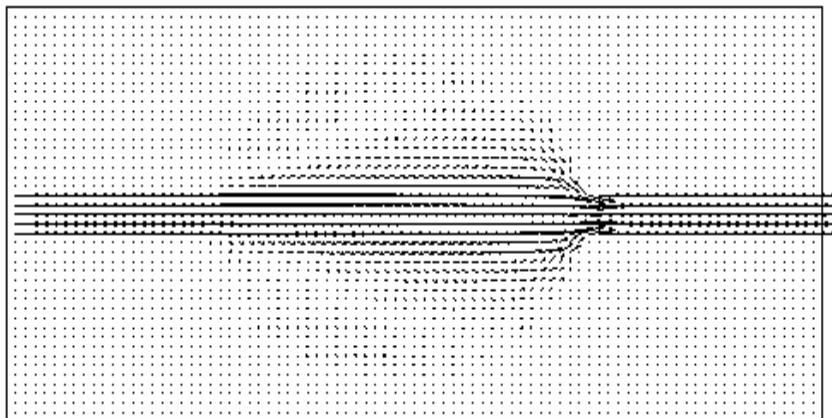
Gambar 9 Pola aliran kasus 5 NonTurbulen.



Gambar 10 Pola aliran kasus 5 Turbulen.



Gambar 11 Pola aliran kasus 6 NonTurbulen.



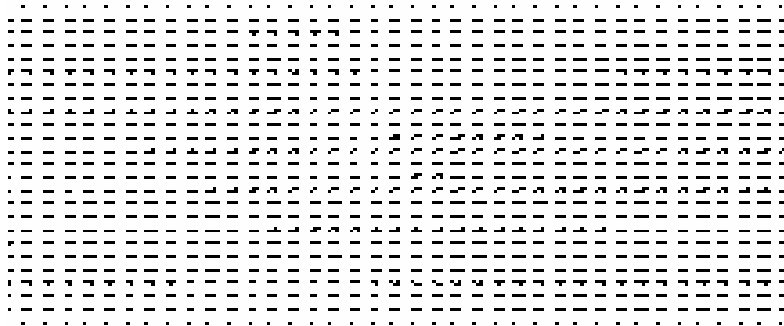
Gambar 12 Pola aliran kasus 6 Turbulen.



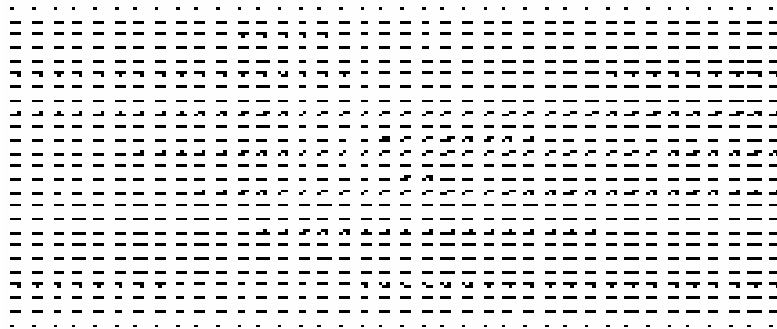
Gambar 13 Pola aliran kasus 7 NonTurbulen.



Gambar 14 Pola aliran kasus 7 Turbulen.



Gambar 15 Pola aliran kasus 8 NonTurbulen.



Gambar 16 Pola aliran kasus 8 Turbulen.

| Jenis Test | Bulatan (kasus 6) | | | |
|--------------|--|----------|----------|------|
| | Waktu | Q Masuk | Q Keluar | % |
| Non-Turbulen | 3'41' | 250.012 | 254.913 | 1.92 |
| Turbulen | 18'33'' | 250.003 | 254.602 | 1.81 |
| Jenis Test | Belokan (kasus 7) | | | |
| | Waktu | Q Masuk | Q Keluar | % |
| Non-Turbulen | 2'04'' | 250.864 | 250.256 | 0.24 |
| Turbulen | 8'57'' | 250.004 | 250.351 | 0.14 |
| Jenis Test | Saluran Lurus dengan dasar belokan S (kasus 8) | | | |
| | Waktu | Q Masuk | Q Keluar | % |
| Non-Turbulen | 8'32'' | 1150.038 | 1141.067 | 0.70 |
| Turbulen | 23'20'' | 1150.000 | 1145.904 | 0.36 |

Tabel 2 Hasil simulasi program untuk test konservasi massa.

| Kasus | Keseserupaan Vektor Kecepatan | | | | |
|-------------------------|-------------------------------|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Non-Turbulen, Splitting | √ | √ | √ | √ | × |
| Turbulen Splitting | √ | √ | √ | √ | × |

Tabel 3 Hasil simulasi program untuk test pengaruh kincir.

Dari Tabel 2 terlihat bahwa konservasi massa untuk jenis test dengan memasukkan suku-suku turbulen mempunyai hasil yang lebih baik daripada tanpa memasukkan suku-suku turbulen. Pada gambar 1 sampai dengan gambar 10 terlihat bahwa hasil simulasi dengan memasukkan suku turbulen menunjukkan pola arus yang lebih baik terutama pada mixing zone dimana turbulensi terdeteksi dengan lebih baik. Gambar 11 sampai dengan Gambar 16 menunjukkan bahwa pola aliran yang terjadi baik turbulen maupun non turbulen adalah serupa. Perbedaan kecilnya adalah di daerah dekat dinding. Perbedaan ini dapat dilihat pada hasil keluaran program dimana hal tersebut disebabkan karena model turbulen lebih berperan pada daerah dekat dinding. Hal ini sesuai dengan konsep turbulen. Namun demikian pengaruh struktur boundary layer

dekat dinding belum terstimulasi dengan baik karena pada tahap awal ini data model fisik yang diperlukan untuk mengkalibrasi di daerah ini belum tersedia sehingga grid model diambil cukup besar.

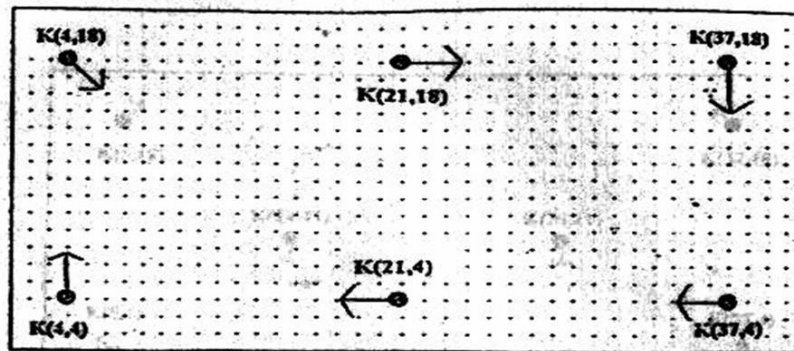
Waktu iterasi yang dibutuhkan untuk menyelesaikan masalah turbulen adalah lebih lama daripada non turbulen. Hal ini disebabkan oleh perbedaan cara dalam menggunakan splitting. Untuk model non turbulen splitting yang digunakan adalah couple, sedangkan pada model turbulen digunakan uncouple (nilai U , V , h diselesaikan terlebih dahulu kemudian baru menghitung k dan ϵ).

Dari tabel 3 terlihat bahwa untuk kasus 1 sampai dengan kasus 4 pola aliran dari kedua model turbulen dan non turbulen mempunyai pola yang hampir sama, namun, seperti yang diperkirakan, model turbulen memberikan sirkulasi arus lebih kuatkecuali. Kecuali untuk kasus 5, hasil pemodelan pada gambar memperlihatkan perbedaan perhitungan sangat signifikan.

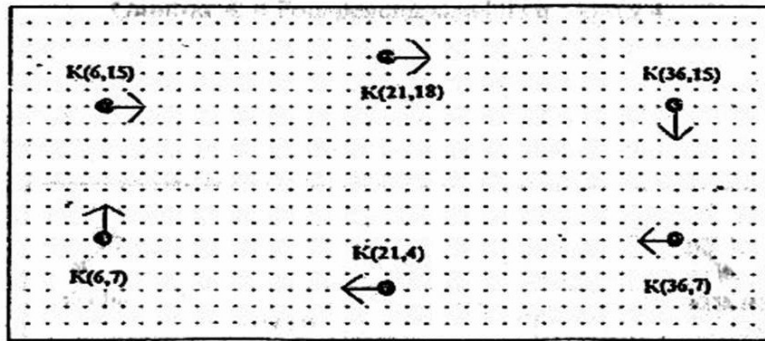
4 Kesimpulan

Pemodelan sirkulasi arus dengan menggunakan Metode $k-\epsilon$ (*two equation model*) menghasilkan pola arus sirkulasi yang lebih baik dan akurat, serta kontinuitas sirkulasi lebih tinggi. Dalam hal ini terlihat kesimetrian pola sirkulasi aliran seperti yang diharapkan. Pemeriksaan kesalahan pemrograman lebih cepat diketahui apabila menggunakan teknik splitting dibandingkan dengan non splitting. Simulasi untuk lapisan batas dekat dinding harus dilakukan dengan grid yang lebih kecil (rapat) dimana dalam hal ini masih memerlukan data kalibrasi hasil model fisik di daerah dinding tersebut.

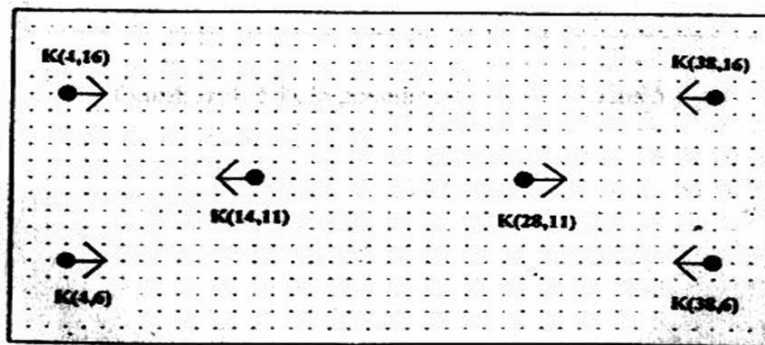
5 Lampiran Penggambaran Kasus untuk Simulasi



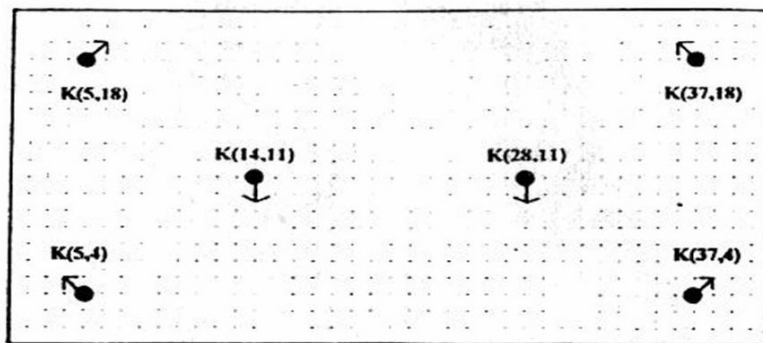
Gambar 17 Pola penempatan kincir Kasus 1.



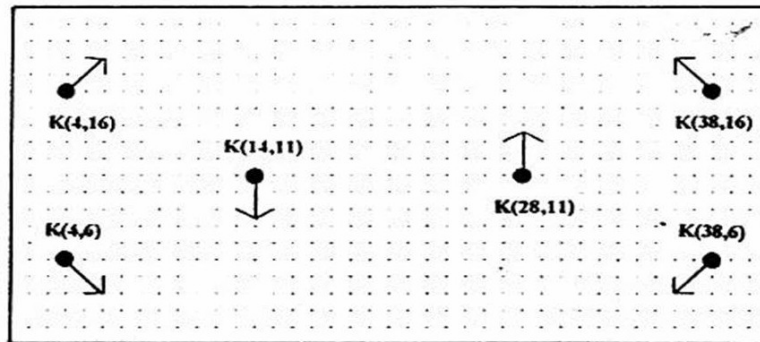
Gambar 18 Pola penempatan kincir Kasus 2.



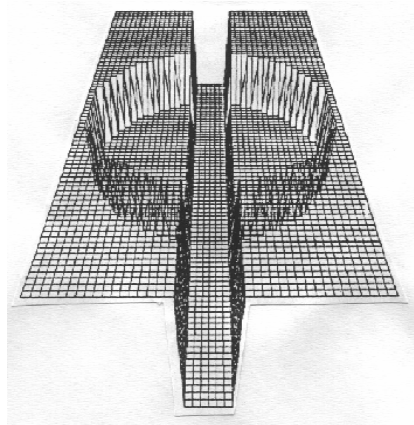
Gambar 19 Pola penempatan kincir Kasus 3.



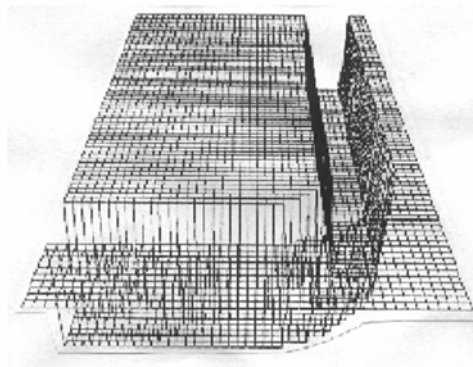
Gambar 20 Pola penempatan kincir Kasus 4.



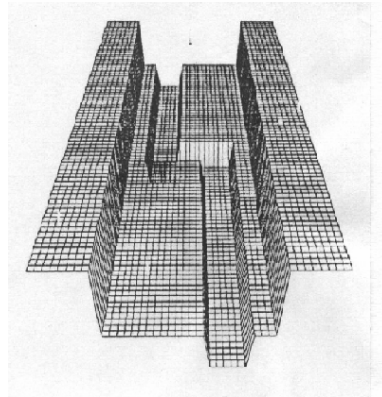
Gambar 21 Pola penempatan kincir Kasus 5.



Gambar 22 Dasar saluran untuk Kasus 6.



Gambar 23 Dasar saluran untuk Kasus 7.



Gambar 24 Dasar saluran untuk Kasus 8.

Ucapan Terimakasih

Makalah ini merupakan hasil dari penelitian Hibah Bersaing XII. Untuk itu kami sampaikan terima kasih kepada Dirjen Dikti yang telah membiayai pelaksanaan penelitian tsb. Terima kasih juga kami sampaikan pada para reviewer yang telah memberikan masukan bagi perbaikan makalah ini.

Daftar Pustaka

1. Abbott, M. B. & Basco, D. R., *Computational Fluid Dynamics an Introduction For Engineers*, Longman Scientific & Technical, England, 1989.
2. Anderson, D. A., Tannehill, J. C. & Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, USA (1984).
3. Anderson JR, J. D., *Computational Fluid Dynamics*, McGraw-Hill International Editions, New York (1995).
4. Budiarto, Iwan, *Penggunaan Teknik Splitting Dalam Penyelesaian Numerik Persamaan Hidrodinamik dan Angkutan Sedimen 2-Dimensi*, Tesis, Departemen Teknik Sipil, Institut Teknologi Bandung (1999).
5. Mohammadi, B. & Pironneau, O., *Analysis of The K-Epsilon Turbulence Model*, John Wiley & Sons (1994).
6. Chaudhry, M. H., *Open Channel Flow*, Prentice Hall, New Jersey (1993).
7. Falconer, R. A. & Guiyi, Li, *Modelling Tidal Flows in an Island's Wake Using a Two Equation Turbulence Model*, *Journal of Fluid Mechanics* (1992), pp. 43-53.
8. Farlow, S. J., *Partial Differential Equations For Scientists & Engineers*, John Wiley & Sons, New York (1982).

9. Fletcher, C. A. J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics* Volume I-II, Second Edition, Springer-Verlag, London (1990).
10. Garcia, R. & Kahawita, R. A., *Numerical Solution of The ST. Venant Equations With The MacCormack Finite Difference Scheme*, International Journal For Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, John Willey & Sons (1986), pp. 259-274.
11. Hoffman, J. D., *Numerical Methods For Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, Singapore (1993).
12. Nakamura, S., *Applied Numerical Methods With Software*, Prentice Hall, New Jersey (1991).
13. Ni, H. Q., Shen, Y. M., Zhou, L. X. & Duan, J. H., *Numerical Simulatoin of Multiple Circulating Flows Using A Depth-Averaged κ - ε Turbulence Model For The Entire Field*, The Sixth Asian Congress of Fluid Mechanics, Singapore (1995), pp. 801-803.
14. Nugroho, Eka Oktariyanto & Murniati, Erni, *Modelisasi Aliran Akibat Angin Pada Fluida Berlapis Dua Dengan Metoda Beda Hingga*, Tugas Akhir, Jurusan Teknik Sipil, Institut Teknologi Bandung (1999).
15. Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. & Vetterling, W. T., *Numerical Recipes The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, New York (1986).
16. Rusdiansyah, Achmad, *Model Numerik Dua Dimensi Hidrodinamika dan Kualitas Air di Tambak: Pengaruh Penempatan Kincir Terhadap Sirkulasi Arus dan Penyebaran Oksigen Terlarut*, Tesis, Departemen Teknik Sipil, Institut Teknologi Bandung (1997).
17. Usman, Syamsul, *Model Numerik Dua Dimensi Sirkulasi Aliran Air Dalam Kolam Dengan Pengaruh Kincir*, Tesis, Departemen Teknik Sipil, Institut Teknologi Bandung (1997).
18. Wilcox, C. David, *Turbulence Modeling For CFD*, DCW Industries, Inc, California (1994).
19. Wilcox, C. David, *Basic Fluid Mechanics*, DCW Industries, Inc, California (1997).
20. Yevjevich, V. & Mahmood, K., *Unsteady Flow in Open Channels*, dari Liggett, J.A., Lake Circulation, Water Resources Publications, Colorado (1975), pp. 879-920.
21. Younus, Muhammad, *Computation of Free-Surface Flow By Using Depth-Averaged κ - ε Turbulence Model*, Disertasi, Department of Civil and Environmental Engineering, Washington State University (1993).