



Tinggi Maksimum Selubung Paket Gelombang Bikromatik*

Wuryansari Muharini Kusumawinahyu^{1,**}, Andonowati^{2,3}

¹ Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya Malang

² Pusat Penelitian, Pengembangan dan Penerapan Matematika ITB

³ Departemen Matematika ITB

Abstrak. Hasil-hasil penelitian terdahulu yang dilakukan secara numerik maupun eksperimental di laboratorium hidrodinamika menyatakan bahwa selubung paket gelombang bikromatik mengalami deformasi berupa peaking dan splitting ketika menjalar menjauhi pembangkit gelombang. Untuk menyelidiki besarnya faktor pemuncakan maka dalam makalah ini dipaparkan penyelidikan terhadap tinggi maksimum dari selubung sinyal bikromatik pada setiap posisi. Di sini profil selubung paket gelombang yang bergantung pada posisi dan waktu ditentukan secara numerik berdasarkan persamaan spatial Nonlinear Schrodinger (sp-NLS), karena di sini kita berhadapan dengan masalah signaling. Penyelidikan dilakukan dengan memberikan beberapa nilai amplitudo dan frekuensi dari selubung paket gelombang bikromatik yang berbeda-beda. Besarnya nilai amplitudo dan frekuensi tersebut berpengaruh terhadap besarnya amplifikasi tinggi selubung gelombang bikromatik dan periode dari maksimum selubung.

Kata kunci: *gelombang bikromatik, selubung paket gelombang, persamaan spatial NLS, masalah signaling, maksimum selubung, faktor amplifikasi*

Abstract. Previous numerical and experimental investigations found that some envelopes of bichromatics surface water waves show deformation during their propagation along the wave tank in Hydrodynamic Laboratory. In this paper we present investigation on the maximum amplitudes of bichromatics envelopes at every position along the tank, to observe the amplification factor of a signal deformation. As we consider a signaling problem, a spatial Nonlinear Schrodinger (sp-NLS) model is used here. The

* Penelitian ini didanai oleh RUTI, Wave motion & simulations 2002/2004 dalam kerjasamanya dengan University of Twente di bawah EPAM: Industrial Mathematics 2000/2005 dan Hibah Bersaing 2002/2003

** Mahasiswa S3 Departemen Matematika, Institut Teknologi Bandung

profiles of waves envelope as a function of time and space are computed numerically from this model. Investigations are done for some different amplitudes and frequencies of bichromatics envelopes at wave generator to show that these two parameters affect the amplification factor and the periode of maximum amplitudes of envelopes .

Keywords: *bichromatics, wave group envelope, spatial NLS equation, signaling problem, maximum amplitude, amplification factor*

1. Pendahuluan

Kajian dalam makalah ini terkonsentrasi pada perubahan bentuk sinyal gelombang air bikromatik di permukaan seperti yang diamati pada hasil pembangkitan gelombang di laboratorium hidrodinamika. Hasil eksperimen sebagaimana yang dilakukan oleh *Stansberg* [1] menunjukkan kenyataan bahwa gelombang permukaan yang pada pembangkit gelombang berupa gelombang bikromatik dengan amplitudo dan frekuensi tertentu, dalam penjalarnya mengalami perubahan bentuk (deformasi) selubung berupa gejala *peaking* (pemuncakan) dan *splitting*. Hasil ini diperkuat dengan perhitungan numerik berdasarkan model tak-linier lengkap dari gelombang permukaan [2]. Analisa mengenai deformasi ini telah pula dikaji dalam [3,4]. Pengetahuan tentang perubahan tinggi maksimum gelombang permukaan tersebut di suatu posisi tertentu jauh dari pembangkit gelombang merupakan masalah yang sangat menarik. Bila pengetahuan tersebut cukup memadai, diharapkan akan terjawab beberapa pertanyaan, yang berkaitan dengan pengujian model kapal atau struktur bahari lain di laboratorium hidrodinamika, seperti di mana sinyal gelombang permukaan mencapai tinggi maksimum; di mana model kapal harus ditempatkan agar dapat diuji dengan gelombang beramplitudo maksimum; bagaimana perilaku dinamika dari maksimum elevasi gelombang yang bergantung pada posisi pengamatan; apakah ia periodik; bila periodik, berapa periodenya, dan sebagainya.

Evolusi gelombang air searah di permukaan dangkal dengan bilangan gelombang kecil (gelombang panjang) telah dimodelkan dengan persamaan Korteweg de Vries (KdV) [5]. Solusi dari persamaan KdV telah dikaji secara luas karena memiliki beberapa sifat khusus yang menarik dan dapat digunakan untuk memodelkan masalah fisis lainnya. Sebagai contoh,

telah kami bahas dalam [6] solusi soliton dari persamaan KdV yang tidak mengalami perubahan bentuk selama evolusinya karena sifat dispersif dan tak linier dari model KdV saling mengimbangi.

Berbeda dengan kajian pada [6], di sini akan diselidiki deformasi dari selubung paket gelombang bikromatik. Evolusi selubung dari suatu paket gelombang yang merupakan solusi khusus dari persamaan KdV dimodelkan oleh persamaan Non Linier Schrodinger (NLS) [5]. Gelombang bikromatik yang merupakan superposisi dua gelombang monokromatik dapat dinyatakan sebagai suatu paket gelombang dengan selubung berupa gelombang monokromatik dengan frekuensi yang merupakan selisih antara frekuensi kedua gelombang monokromatik yang membentuk gelombang bikromatik. Dengan demikian di sini akan dimanfaatkan persamaan NLS untuk menyelidiki deformasi selubung gelombang bikromatik. Dengan mengamati evolusi selubung paket gelombang tersebut secara numerik melalui persamaan NLS dapat dilihat perilaku maksimum tinggi selubung yang diperkirakan juga merupakan maksimum tinggi gelombang bikromatik itu sendiri. Dapat ditunjukkan bahwa perubahan tinggi maksimum amplitudo selubung dan periodenya dipengaruhi oleh amplitudo dan frekuensi selubung sinyal bikromatik yang dibangkitkan pada pembangkit gelombang.

Organisasi pada makalah ini adalah sebagai berikut. Pada sesi berikutnya akan diturunkan model persamaan *spatial* Nonlinier Schrodinger yang akan digunakan pada permasalahan *signaling*. Sedangkan masalah signaling untuk kasus penjalaran gelombang bikromatik akan diringkaskan pada sesi 3. Sesi 4 menyajikan hasil perhitungan numerik untuk berbagai beda frekuensi dan amplitudo selubung. Tulisan ini diakhiri dengan kesimpulan pada sesi 5.

2. Persamaan Nonlinier Schrodinger

Tinggi permukaan gelombang panjang pada suatu lapisan fluida di atas dasar rata yang menjalar pada satu arah telah dimodelkan oleh Korteweg de Vries (KdV) dalam persamaan berikut [5].

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + i\Omega(-i \frac{\partial}{\partial x})\eta = -C_0 \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1)$$

di mana $\Omega(k) = k\sqrt{\tanh(k)/k}$ menyatakan frekuensi, k menyatakan bilangan gelombang, C_0 suatu konstanta, dan $\eta(x,t)$ adalah elevasi gelombang dalam koordinat yang dinormalkan, yang kaitannya dengan koordinat fisik (laboratorium) $\eta_{lab}, x_{lab}, t_{lab}$ dinyatakan dengan transformasi

$$\eta_{lab} = h\eta, \quad x_{lab} = hx, \quad t_{lab} = \sqrt{h/g} t \quad (2)$$

dengan h dan g berturut-turut menyatakan kedalaman air dan konstanta percepatan gravitasi.

Berdasarkan metode perturbasi dipilih suatu solusi untuk persamaan KdV yang berbentuk

$$\eta(x,t) = \varepsilon\eta_1(x,t) + \varepsilon^2\eta_2(x,t) + \varepsilon^3\eta_3(x,t) + \dots \quad (3)$$

di mana $\varepsilon > 0$, suatu konstanta.

Penyulihan solusi (3) ke persamaan KdV (1) akan menghasilkan polinom dalam ε . Dengan memandang koefisien dari polinom tersebut akan diperoleh hasil berikut.

1. Untuk $o(\varepsilon)$ dihasilkan persamaan diferensial berikut

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + i\Omega(-i\frac{\partial}{\partial x})\eta_1 = 0. \quad (4)$$

Kita dapat memilih suatu solusi khusus

$$\eta_1(x,t) = \tilde{A}(\xi, \tau)e^{i(k_0x - \omega_0t)} + c.c. \quad (5)$$

yang memenuhi persamaan (4), di mana c.c. adalah singkatan untuk kompleks sekawan (*complex conjugate*) dan $\tilde{A}(\xi, \tau)$ menyatakan selubung dari paket gelombang $\eta_1(x,t)$, di mana $\xi = \varepsilon(x - V_0t)$ dan $\tau = \varepsilon^2t$. Di sini $\tilde{A}(\xi, \tau)$ diasumsikan berubah secara lambat terhadap ruang dan waktu (*slowly varying*), dan termodulasi oleh gelombang monokromatik berfrekuensi $\omega_0 = \Omega(k_0)$ dengan bilangan gelombang k_0 .

2. Untuk $o(\varepsilon^2)$ kita mempunyai persamaan diferensial

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + i\Omega(-i\frac{\partial}{\partial x})\eta_2 = -C_0f(\eta_1, \frac{\partial \eta_1}{\partial x}, \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi}). \quad (6)$$

Penyulihan solusi (5) ke dalam ruas kanan persamaan (6) akan menghasilkan suatu suku yang beresonansi dengan solusi homogen persamaan (6). Untuk menghindarinya, koefisien suku tersebut dieliminasi sehingga diperoleh

$$V_0 = \Omega'(k_0),$$

yang menyatakan kecepatan penjalaran dari selubung paket gelombang, dan disebut kecepatan grup. Selanjutnya persamaan (6) yang tidak lagi memuat suku resonansi diselesaikan dengan memisalkan

$$\eta_2(x, t) = B(\xi, \tau)e^{i2\theta(x, t)} + C(\xi, \tau) + c.c. \quad (7)$$

di mana $\theta(x, t) = k_0x - \omega_0t$. Penyulihan solusi (7) ke persamaan (6) tanpa suku resonansi akan menghasilkan

$$B(\xi, \tau) = C_0 \frac{k_0 \tilde{A}^2(\xi, \tau)}{2\Omega(k_0) - \Omega(2k_0)}$$

3. Pada $o(\varepsilon^3)$ kita mempunyai persamaan diferensial

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial t} + i\Omega(-i \frac{\partial}{\partial x})\eta_3 = -C_0 g(\eta_1, \frac{\partial \eta_1}{\partial x}, \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \eta_2, \frac{\partial \eta_2}{\partial x}). \quad (8)$$

Dengan menggunakan $\eta_1(x, t)$ dan $\eta_2(x, t)$ yang telah kita peroleh maka persamaan (8) menjadi persamaan diferensial yang ruas kanannya memuat suku resonansi. Pengeliminasian koefisien suku resonansi dan suku konstan dari ruas kanan persamaan (8) akan menghasilkan

$$C(\xi, \tau) = C_0 \frac{\|\tilde{A}(\xi, \tau)\|^2}{\Omega'(k_0) - \Omega'(0)}$$

dan persamaan *temporal-Non Linier Schrodinger* (temp-NLS) berikut ini, seperti yang seringkali kita lihat pada referensi standar.

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tau} + i\tilde{\beta} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \xi^2} + i\tilde{\gamma} |\tilde{A}|^2 \tilde{A} = 0, \quad (9)$$

di mana $\tilde{\beta} = -\frac{1}{2}\Omega''(k_0)$, dan $\tilde{\gamma} = C_0^2 k_0 (\sigma_0 + \sigma_2)$ dengan

$$\sigma_0 = \frac{1}{\Omega'(k_0) - \Omega'(0)} \text{ dan } \sigma_2 = \frac{k_0}{2\Omega(k_0) - \Omega(2k_0)}.$$

Dengan demikian kita telah mempunyai solusi $\eta(x, t)$ dari persamaan KdV yang dinyatakan dalam $\tilde{A}(\xi, \tau)$ sebagai

$$\eta(x, t) = \varepsilon \tilde{A}(\xi, \tau)e^{i\theta(x, t)} + \varepsilon^2 (B(\xi, \tau)e^{i2\theta(x, t)} + C(\xi, \tau)) + \dots + c.c.$$

di mana $\tilde{A}(\xi, \tau)$ memenuhi persamaan (9), sedangkan $B(\xi, \tau)$ dan $C(\xi, \tau)$ dapat dinyatakan dalam $\tilde{A}(\xi, \tau)$. Dalam koordinat $\tilde{A}(x, t)$, persamaan (9) dinyatakan dengan persamaan NLS

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + i\tilde{\beta} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x^2} + i\tilde{\gamma} |\tilde{A}|^2 \tilde{A} = 0 \quad (10)$$

Penurunan di atas menghasilkan rumusan yang sama sebagaimana dapat dilihat pada [5], [7], [8] dan [9].

Pada kajian ini kita tertarik untuk melihat perambatan signal. Dalam hal ini diketahui selubung $\tilde{A}(x, t)$ di suatu posisi tertentu, katakan pada $x=0$, yaitu $\tilde{A}(0, t) = f(t)$. Selanjutnya ingin diamati perubahan dari $\tilde{A}(0, t)$ pada posisi yang lain pada pembangkit gelombang. Untuk itu kita gunakan transformasi $\hat{\xi} = \varepsilon^2 x$, $\hat{\tau} = \varepsilon(t - x/V_0)$ dan $\hat{A} = \tilde{A}/\varepsilon$ untuk memperoleh persamaan spatial NLS (selanjutnya disingkat sp-NLS)

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{\xi}} + i\beta \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial \hat{\tau}^2} + i\gamma |\hat{A}|^2 \hat{A} = 0, \quad (11)$$

di mana $\beta = \tilde{\beta}/V_0^3$ dan $\gamma = \tilde{\gamma}/V_0$ (lihat [7]). Perhatikan bahwa pada persamaan (9) dan (11) variabel posisi ξ atau $\hat{\xi}$ bertukar peran dengan variabel waktu τ atau $\hat{\tau}$. Hal ini akan dibahas lebih rinci pada bagian berikutnya.

Untuk memperoleh bentuk yang lebih sederhana, persamaan spatial NLS (11) dapat dinormalisasi dengan melakukan penskalaan $A = \sqrt{\gamma} \hat{A}$, $\xi^* = \hat{\xi}$ dan $\tau^* = \hat{\tau}/\sqrt{\beta}$, sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\frac{\partial A}{\partial \xi^*} + i \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^{*2}} + i|A|^2 A = 0. \quad (12)$$

Kini kita sarikan transformasi yang telah kita lakukan dari koordinat fisis (laboratorium) ke koordinat persamaan spatial NLS yang dinormalkan sebagai berikut.

$$A_{lab} = \frac{h\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} A, \quad x_{lab} = \frac{h}{\varepsilon^2} \xi^*, \quad t_{lab} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\beta h}{g}} \tau^* + \frac{1}{\varepsilon^2 V_0} \sqrt{\frac{h}{g}} \xi^* \quad (13)$$

Perhatikan bahwa menggunakan sifat fungsi trigonometri, gelombang bikromatik

$$\begin{aligned}\eta(x,t) &= q \cos(k_1x - \omega_1t) + q \cos(k_2x - \omega_2t) \\ &= 2q \cos(\kappa x - \nu t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)\end{aligned}$$

dengan $\bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, $\kappa = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$, dan $\nu = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$, dapat dipandang sebagai paket gelombang

$$\eta(x,t) = 2\tilde{A}(x,t) \cos(k_0x - \omega_0t) = \tilde{A}(x,t)e^{i(k_0x - \omega_0t)} + c.c.$$

dengan selubung $\tilde{A}(x,t) = q \cos(\kappa x - \nu t)$, $k_0 = \bar{k}$, $\omega_0 = \bar{\omega}$. Menurut *Stansberg* [1], bila suatu signal bikromatik dibangkitkan, maka ia akan mengalami deformasi selama penjarannya menjauhi pembangkit gelombang yang terletak, katakan pada $x = 0$. Deformasi yang terjadi berupa pemuncakan (*peaking*), yakni amplitudo maksimumnya bertambah dan pemisahan paket gelombang (*splitting*). Fenomena *peaking* menarik untuk dipelajari karena berkaitan erat dengan pembangkitan gelombang ekstrim yang saat ini sangat diperlukan di laboratorium hidrodinamika. Oleh karena itu penelitian ini terkonsentrasi pada pengamatan perilaku *peaking* dengan mengamati dinamika dari nilai maksimum selubungnya pada suatu interval waktu tertentu di setiap posisi pada kolam pengujian (*wave tank*) di laboratorium hidrodinamika.

3. Masalah Signaling

Misalkan pada pembangkit gelombang, katakan pada $x=0$, dibangkitkan gelombang bikromatik dengan selubung $\tilde{A}(x=0,t) = q \cos(\nu t)$. Akan diselidiki bagaimana perilaku selubung tersebut pada beberapa posisi di sepanjang *wave tank*. Karena di sini diketahui data sinyal gelombang bikromatik di suatu posisi, yaitu di pembangkit gelombang, dan akan diselidiki tinggi maksimum selubung sinyal gelombang di posisi yang lain maka masalah ini disebut masalah signaling [7]. Bila kita memanfaatkan persamaan temporal NLS (9) untuk menyelesaikan masalah ini maka kita melakukan kekeliruan karena pada $x = 0$ koordinat yang bersesuaian pada persamaan temporal NLS adalah $\xi = -\varepsilon V_0 t$ dan $\tau = \varepsilon^2 t$, yang tidak memberikan syarat awal bagi penyelesaian persamaan (9) secara numerik. Di lain pihak, masalah tersebut akan menjadi masalah syarat awal bagi

persamaan sp-NLS (11) dengan $\hat{A}(\hat{\xi} = 0, \hat{\tau}) = q \cos(\hat{\nu}\hat{\tau})$. Pada persamaan (11) maupun (12) $\hat{\xi}$ maupun $\hat{\xi}^*$ berperan sebagai variabel 'waktu' dalam pengintegralan secara numerik. Dengan alasan inilah kita tidak menggunakan persamaan temporal NLS namun persamaan sp-NLS untuk menyelesaikan masalah signaling.

Menggunakan algoritma *implicit Crank-Nicholson*, secara numerik A. Suryanto [7] telah menyelesaikan masalah syarat awal untuk persamaan sp-NLS yang dinormalkan (12) dengan syarat awal periodik $A(\xi^* = 0, \tau^*) = qa \cos(\pi\tau^*)$, dengan $\tau^* \in [0, 2]$ dan $C_0 = 3/2$. Karena keperiodikan syarat awal tersebut maka solusi numerik masalah syarat awal tersebut periodik terhadap variabel waktu τ^* . Nilai qa ditentukan berdasarkan persamaan (13) yang pertama, bila $q_{lab}^0 = A_{lab}(x_{lab} = 0, t_{lab} = 0)$ diberikan.

4. Tinggi Maksimum Selubung Gelombang Bikromatik dan Periodenya

Memanfaatkan hasil pada [7] dan kaitan antara koordinat fisis dan koordinat sp-NLS yang dinormalkan (13), dapat diperoleh nilai maksimum dari selubung paket gelombang bikromatik terhadap variabel waktu di setiap posisi pada koordinat fisis. Nilai tersebut dinyatakan sebagai

$$\alpha(x_{lab}) = \max_{t_{lab}} A_{lab}(x_{lab}, t_{lab}). \quad (14)$$

Nilai ε ditentukan melalui (13) khususnya hubungan $t_{lab} = 1/\varepsilon \sqrt{\beta h/g} \tau^* + 1/\varepsilon^2 V_0 \sqrt{h/g} \xi^*$. Periode fisis dari selubung gelombang bikromatik di $x=0$, yaitu $T_{lab} = 2\pi/v_{lab}$ berperan sebagai t_{lab} . Dengan demikian diperoleh hubungan $T_{lab} = 1/\varepsilon \sqrt{\beta h/g} T_{Nsp} + 1/\varepsilon^2 V_0 \sqrt{h/g} \xi^*$. Posisi $x = 0$ bersesuaian dengan $\xi^* = 0$ sehingga pada pembangkit gelombang diperoleh

$$T_{lab} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\beta h}{g}} T_{Nsp},$$

atau

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\beta h}{g} \frac{v_{lab}}{v_{Nsp}}}.$$

Di sini T_{Nsp} dan $\nu_{Nsp} = \pi$ masing-masing adalah periode dan frekuensi selubung signal bikromatik dalam koordinat yang digunakan pada persamaan sp-NLS yang dinormalkan (12).

Selanjutnya menggunakan transformasi (13) diperoleh

$$\begin{aligned}\alpha(x_{lab}) &= \max_{t_{lab}} A_{lab}(x_{lab}, t_{lab}) = \max_{c_1\tau^* + c_2\xi^*} c_3 A(c_4\xi^*, c_1\tau^* + c_2\xi^*) \\ &= c_3 \max_{\tau^*} A(c_4\xi^*, c_1\tau^* + c_2\xi^*),\end{aligned}$$

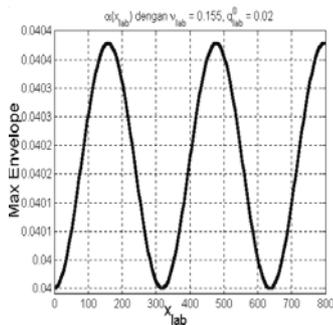
di mana $c_1 = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\beta h}{g}}$, $c_2 = \frac{1}{\varepsilon^2 V_0} \sqrt{\frac{h}{g}}$, $c_3 = \frac{h\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}$, dan $c_4 = \frac{h}{\varepsilon^2}$. Setelah dilakukan

transformasi variabel posisi dan waktu dari koordinat yang dinormalkan ke koordinat fisis dapat digambarkan grafik dari $\alpha(x_{lab})$. Nilai maksimum yang diperoleh merupakan nilai maksimum global karena diperoleh dengan memaksimalkan solusi numerik dari masalah syarat awal (12) dengan syarat awal periodik, yang periodik pula.

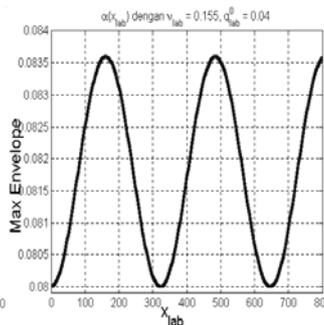
Perlu kiranya dicatat bahwa A_{lab} bergantung terhadap q_{lab}^0 dan perbandingan antara q_{lab}^0 dan ν_{lab} sebagaimana ditulis dalam [8] dan [9], namun belum diketahui kebergantungan $\alpha(x_{lab})$ terhadap ke dua parameter tersebut. Untuk menyelidiki pengaruh amplitudo dan perbedaan frekuensi dari gelombang bikromatik terhadap $\alpha(x_{lab})$ dan periode dari $\alpha(x_{lab})$ digunakan beberapa nilai amplitudo $q_{lab}^0 = A_{lab}(x_{lab} = 0, t_{lab} = 0)$ dan beda frekuensi ν_{lab} dari gelombang bikromatik di pembangkit gelombang. Hasilnya dapat dilihat pada tabel dan gambar-gambar berikut ini.

$\nu_{lab} = 0,155$			$q_{lab}^0 = 0,008$		
q_{lab}^0	$AF = \frac{\max \alpha(x_{lab})}{\alpha(0)}$	Periode $\alpha(x_{lab})$	ν_{lab}	$AF = \frac{\max \alpha(x_{lab})}{\alpha(0)}$	Periode $\alpha(x_{lab})$
0,02	1,010	318,1	0,62	1,005	19,50
0,04	1,045	322,0	0,31	1,035	79,65
0,08	1,220	338,0	0,155	1,220	334,74
0,16	2,073	206,7	0,0775	2,168	730,00

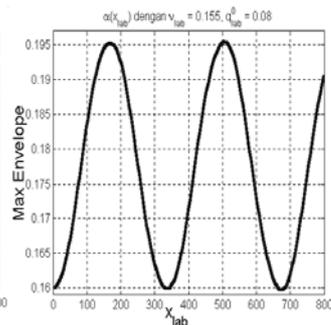
Tabel 1. Pengaruh beda frekuensi dan amplitudo di pembangkit gelombang terhadap faktor amplifikasi dan periode dari maksimum tinggi selubung gelombang bikromatik



Gambar 1.a.



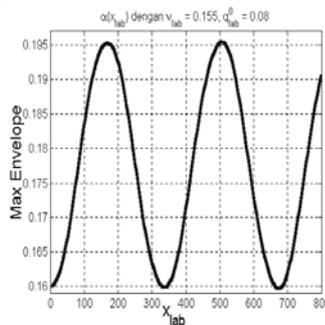
Gambar 1.b.



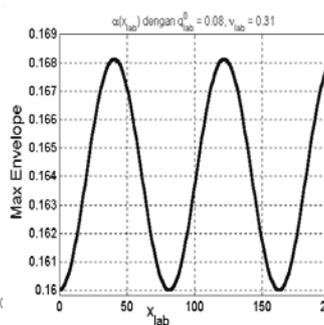
Gambar 1.c.

Gambar 1. Grafik nilai maksimum tinggi selubung signal bikromatik $\alpha(x_{lab})$ dengan $v_{lab} = 0.155$ dan (1.a.) $q_{lab}^0 = 0,02$, (1.b.) $q_{lab}^0 = 0,04$ dan (1.c.) $q_{lab}^0 = 0,08$.

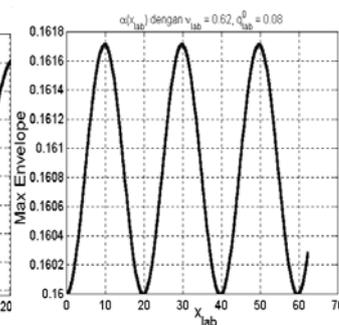
Gambar 1.a., 1.b., dan 1.c. berturut-turut memperlihatkan plot dari tinggi maksimum selubung $\alpha(x_{lab})$ dari gelombang air di permukaan yang di pembangkit gelombang berupa gelombang bikromatik dengan $q_{lab}^0 = 0,02 = 0,25 \times 0,08$, $q_{lab}^0 = 0,04 = 0,5 \times 0,08$, dan $q_{lab}^0 = 0,08$. Untuk memusatkan perhatian pada pengaruh amplitudo maka di sini frekuensi v_{lab} diambil konstan, yaitu sebesar 0,155. Pada tabel 1 terlihat bahwa faktor pemuncakan / amplifikasi $AF = \frac{\max \alpha(x_{lab})}{\alpha(0)}$ meningkat bila nilai q_{lab}^0 membesar, namun q_{lab}^0 tidak memperlihatkan pengaruh yang berarti terhadap periode dari $\alpha(x_{lab})$, kecuali untuk $q_{lab}^0 = 0,16$.



Gambar 2.a.



Gambar 2.b.

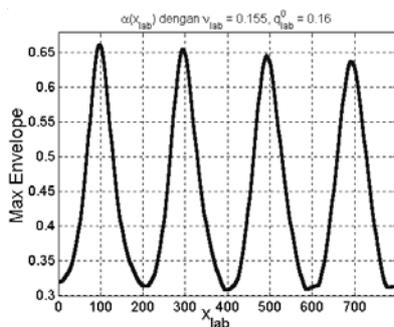


Gambar 2.c.

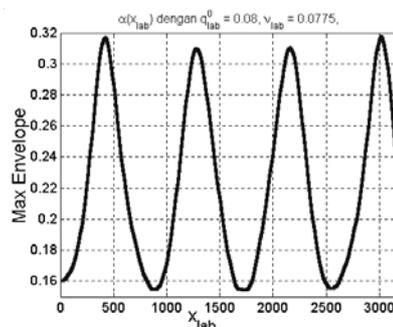
Gambar 2. Grafik nilai maksimum tinggi selubung signal bikromatik $\alpha(x_{lab})$ dengan $q_{lab}^0 = 0,08$ dan (2.a.) $v_{lab} = 0.155$, (2.b.) $v_{lab} = 0.31$ dan (2.c.) $v_{lab} = 0.62$.

Gambar 2.a., 2.b., dan 2.c. berturut-turut memperlihatkan plot dari $\alpha(x_{lab})$ dengan $v_{lab} = 0,155$, $v_{lab} = 0,31 = 2 \times 0,155$, dan $v_{lab} = 0,62 = 4 \times 0,155$. Di sini amplitudo q_{lab}^0 diambil konstan, yaitu sebesar 0,08. Dapat dilihat pada tabel 1 bahwa faktor amplifikasi AF menurun bila v_{lab} bertambah. Demikian pula dengan periode dari $\alpha(x_{lab})$. Ia berkurang sekitar 4 kali lipat bila nilai v_{lab} bertambah menjadi dua kali lipat, kecuali untuk $v_{lab} = 0,0775$. Dengan demikian untuk kasus ini, dapat disimpulkan bahwa perioda *spatial* dari maksimum selubung $\alpha(x_{lab})$ adalah $O(1/v^2)$.

Sebagaimana diperlihatkan pada Tabel 1, terdapat *anomali* pada hasil perhitungan perioda $\alpha(x_{lab})$, jika q_{lab}^0 besar atau v_{lab} kecil. Grafik dari $\alpha(x_{lab})$ untuk $q_{lab}^0 = 0.16$ dengan $v_{lab} = 0,155$ dan $q_{lab}^0 = 0.08$ dengan $v_{lab} = 0,0775$ untuk kasus ini disajikan pada gambar 3. berikut ini. Bandingkan grafik 3.a dengan grafik-grafik pada Gambar 1 dan grafik 3.b. dengan grafik-grafik pada Gambar 2; grafik 3.a menunjukkan adanya pengaruh amplitudo selubung terhadap perioda $\alpha(x_{lab})$, jika q_{lab}^0 cukup besar sedangkan grafik 3.b. menunjukkan bahwa jika v_{lab} cukup kecil, perioda $\alpha(x_{lab})$ bukan lagi $O(1/v^2)$.



Gambar 3.a.



Gambar 3.b.

Gambar 3. Grafik dari $\alpha(x_{lab})$ untuk (3.a.) $q_{lab}^0 = 0.16$, $v_{lab} = 0,155$ dan (3.b.) $q_{lab}^0 = 0.08$, $v_{lab} = 0,0775$

5. Kesimpulan

Telah dilakukan penghitungan nilai maksimum dari selubung gelombang bikromatik sepanjang towink tank secara numerik. Dari hasil ini dapat diketahui posisi di mana terjadinya pemuncakan / amplifikasi elevasi permukaan air yang maksimum.

Telah diselidiki pula pengaruh amplitudo dan perbedaan frekuensi gelombang bikromatik di pembangkit gelombang terhadap besarnya faktor amplifikasi dan periode dari nilai maksimum tinggi selubung gelombang bikromatik. Ditemukan bahwa besarnya faktor amplifikasi berbanding lurus dengan amplitudo dan berbanding terbalik dengan besarnya perbedaan frekuensi. Bentuk kebergantungan faktor amplifikasi terhadap amplitudo dan perbedaan frekuensi tersebut perlu dikaji lebih lanjut.

Jika q_{lab}^0 tidak terlalu besar dan v_{lab} tidak terlalu kecil, maka periode *spatial* dari nilai maksimum tinggi selubung gelombang bikromatik $\alpha(x_{lab})$ berbanding terbalik dengan kuadrat dari perbedaan frekuensi gelombang bikromatik di pembangkit gelombang, $O(1/v^2)$. Hal ini tidak lagi benar untuk q_{lab}^0 cukup besar atau v_{lab} cukup kecil. Hasil perhitungan numerik menunjukkan adanya pengaruh kedua besaran tersebut pada periode $\alpha(x_{lab})$. Merupakan hal yang menarik untuk membahas kebergantungan periode $\alpha(x_{lab})$ ini terhadap kedua besaran q_{lab}^0 dan v_{lab} . Telaah ini akan sangat bermanfaat pada pembangkitan gelombang ekstrim di laboratorium hidrodinamika. Studi berikutnya akan mengkaji kebergantungan ini secara seksama.

Pustaka

1. Stansberg, C., "On the Nonlinear Behaviour of Ocean Wave Groups", *Proc. Waves '97*, **2**, 1227 (1997).
2. Westhuis, J.H., "The Numerical Simulation of Nonlinear Waves in a Hydrodynamic Model Test Basin", PhD Thesis in University of Twente, the Netherlands, (2001).
3. Groesen, E. van, Andonowati, Soewono, E, "Non-linear effects in bi-chromatic surface waves ", *Proc. Estonian Acad. Sci., Mathematics and Physics*, **48**, 206, (1999).

4. Groesen, E. van, Karyanto, N., Peterson, P., Andonowati, "Wave dislocation and non-linear amplitude amplification for extreme fluid surface waves", submitted to Physical Letters A.
5. Groesen, E. van, "Wave Groups in Uni-directional Surface Wave Models", *J. Eng. Math.*, **34**, 215 (1998).
6. Kusumawinahyu, W.M., Soewono, E., "*Phase Portrait Identification of Soliton Interactions of Truncated Korteweg-de Vries Equation*", MIHMI, Vol. 4 No. 1, (1998).
7. Groesen, E. van, "Aspects of On-Going Research on Bichromatics Wave Trains", informal paper for LABMATH-meeting 14 February 2000 at ITB, Bandung.
8. Cahyono, E. "Analitical Wave Codes for Predicting Surface Waves in a Laboratory Basin", PhD Thesis, University of Twente, the Netherlands,(2002).
9. Nusantara, T., "Paket Gelombang Tak Linear dari Persamaan Gelombang Permukaan", Thesis Program Doktor, ITB, (2001).