



# Respons getaran non-linier pada sistem poros-rotor Bagian II: Kaji banding metode Runge-Kutta dan metode deret fungsional Volterra

Tegoeh Tjahjowidodo<sup>1</sup>, Komang Bagiasna<sup>2</sup>, dan Zainal Abidin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratorium Dinamika, PPAUIR – ITB, Jalan Ganesha 10, Bandung 40132  
Tel./Fax. 022-2506283, E-mail: [tegoeh@dynamic.pauir.itb.ac.id](mailto:tegoeh@dynamic.pauir.itb.ac.id)

<sup>2</sup>Program Studi Teknik Sistem Mekanika, Teknik Mesin, Fakultas Pascasarjana, ITB  
Jalan Ganesha 10, Bandung 40132

Masuk: Agustus 1999; revisi masuk: Juli 2000; diterima: Agustus 2000

---

## Sari

Bantalan gelinding digunakan secara luas sebagai penunpu pada setiap mesin rotasi. Oleh karena itu, karakteristik dinamik suatu bantalan harus dapat diketahui dengan baik. Karakteristik dinamik bantalan yang diketahui dapat digunakan untuk menganalisis respons getaran yang terjadi pada struktur yang menggunakan bantalan tersebut. Sayangnya mekanisme kontak pada bantalan mengakibatkan kekakuan yang tidak linier pada bantalan. Hal ini mengakibatkan bantalan gelinding merupakan sistem getaran yang tidak linier. Berdasarkan hal tersebut, analisis Fungsi Respons Frekuensi (FRF) pada sistem bantalan merupakan analisis getaran non-linier. Analisis FRF Non-Linier dapat dilakukan dengan memanfaatkan deret Volterra. Dalam penelitian ini deret Volterra digunakan untuk menentukan FRF Non-Linier dari bantalan yang diamati sehingga dapat diramalkan respons getarannya pada frekuensi harmonik akibat sinyal pegeksitasi.

*Kata kunci:* deret Volterra, kelonggaran, *misalignment*, Newton-Rhapson, Runge-Kutta, *unbalance*.

---

## Abstract

### Non-linear vibration response of bearing system Part II: Comparative study of Runge-Kutta method and Volterra-functional-series method

Rotating machinery is commonly utilized in the processing industry. Vibration monitoring based on predictive maintenance technology is widely utilized for condition monitoring of the rotating machinery in service. This maintenance technology is based on the signature of the vibration response normally measured at the bearing house. On the other hand, the vibration response of a system is determined by the system dynamic characteristics and its working stimulus. Therefore the nature of the main component dynamic characteristics results in significant influence on the predicted vibration response at the bearing house. As mentioned above the signature of the vibration response measured at the bearing house and presented in the frequency domain contains several harmonic signals. Most of the higher harmonics do not have physical meanings, but they exist in the vibration measurement results and confused the researchers. Regarding those harmonic signals a hypothesis can be developed for identifying its origin. They are assumed to be generated due to dynamic characteristic non-linearity of the vibration system combined with the stiffness non-linearity of the roll bearing. By analyzing harmonic signal response due to nonlinear property of the vibration system, hopefully the mechanical signature of nonlinear vibration system can be generated. Therefore, many other mechanical signatures of components failure can be formulated and the harmonic signals, which are usually occurred, can be predicted more accurately.

*Keywords:* clearance, misalignment, Newton-Rhapson, Runge-Kutta, series Volterra, unbalance.

---

## 1 Pendahuluan

Bantalan gelinding banyak digunakan dalam mesin rotasi sebagai penunpu struktur yang berputar maupun yang tidak berputar. Dengan mengetahui karakteristik dinamik bantalan yang digunakan, respons getaran yang terjadi pada struktur dapat lebih mudah dianalisis. Mengingat bantalan gelinding memiliki kekakuan yang tidak linier, digunakan model Volterra untuk analisis karakteristik dinamik bantalan tersebut.

Analisis FRF Non-Linier dengan memanfaatkan deret Volterra telah dikembangkan dalam beberapa penelitian terdahulu untuk sistem *beam* sederhana yang ditunpu oleh engsel dan rol [1,2]. Penekanan kegiatan penelitian ini terletak pada aspek analisis respons getaran dengan metode deret Volterra pada sistem rotasi yang ditunpu oleh bantalan bola. Hasil analisis tersebut kemudian dibandingkan dengan hasil pemodelan melalui metode Runge-Kutta. Dengan sedikit modifikasi, metode Runge-

Kutta dapat dimanfaatkan untuk menentukan FRF Non-Linier dengan cara memberikan sinyal eksitasi sinusoidal yang frekuensinya diubah secara bertahap sepanjang rentang frekuensi tertentu.

Dalam kaji teoretik ini dilakukan analisis pengaruh *kelonggaran* (kelonggaran) bantalan terhadap fungsi respons frekuensi sistem getaran bantalan. Kelonggaran pada bantalan akan berpengaruh karakteristik kekakuan bantalan sehingga juga akan mempengaruhi fungsi respons frekuensi sistem. Hubungan antara fungsi respons frekuensi kelonggaran ini diharapkan dapat digunakan untuk meramalkan keausan bantalan yang terjadi.

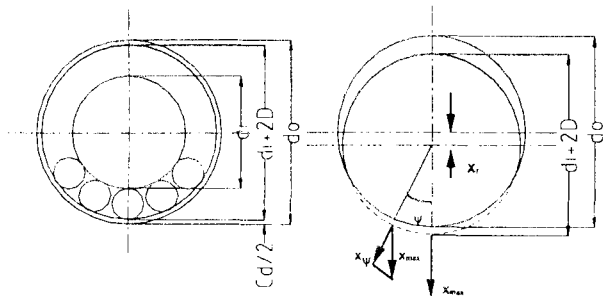
**2 Kekakuan bantalan**

Kekakuan bantalan dapat ditentukan dengan memperhatikan geometri bantalan. Harris, White dan Lim [3,4,5] telah melakukan penelitian yang menyeluruh, baik untuk kekakuan bantalan rol maupun bantalan bola. Adanya *kelonggaran* (kelonggaran) pada bantalan merupakan salah satu faktor yang mengakibatkan kekakuan non-linier pada bantalan tersebut. Pengaruh kelonggaran pada bantalan ditunjukkan pada Gambar 1. Sementara itu hubungan antara besar gaya dan defleksi yang merupakan parameter penentu kekakuan bantalan ditunjukkan oleh persamaan berikut [6]:

$$F = K_t \sum_{\psi=-\psi_1}^{\psi_1} \left( x_m \cos \psi - \frac{c_d}{2} \right)^n \cos \psi \quad (1)$$

- Dalam hal ini,  $K_t$  : kekakuan kontak elemen gelinding
- $x_m$  : defleksi maksimum
- $C_d$  : kelonggaran pada bantalan
- $\psi$  : posisi angular elemen gelinding
- $\psi_1$  : batas daerah beban (*load zone*)

Kekakuan bantalan keseluruhan (*overall stiffness*) dapat dihitung dengan menggunakan iterasi Newton-Rhapon [8,8], dan spesifikasi bantalan yang digunakan dapat dilihat pada Tabel 1.



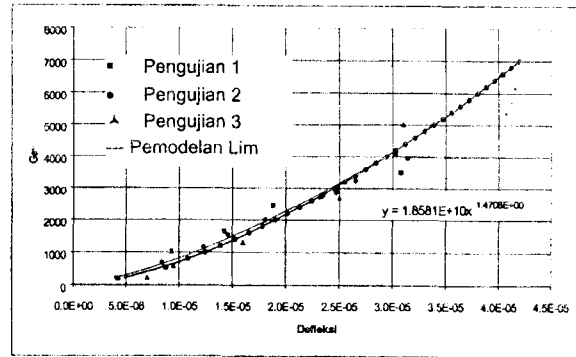
- $d_i$  : diameter dalam
- $d_o$  : diameter luar
- $x_{max}$  : defleksi maksimum elemen gelinding dalam arah radial
- $x_\psi$  : defleksi elemen gelinding dalam arah radial pada posisi  $\psi$

Gambar 1 Pengaruh kelonggaran pada daerah beban

Tabel 1 Spesifikasi bantalan yang digunakan

Jenis bantalan bola	RHP 6307
Jumlah elemen rol	8
Beban maksimum statik	33.5 kN
Diameter rol	13.494 mm
Radius <i>inner groove</i>	6.823 mm
Radius <i>outer groove</i>	7.175 mm
Kelonggaran	10 – 30 $\mu$ m

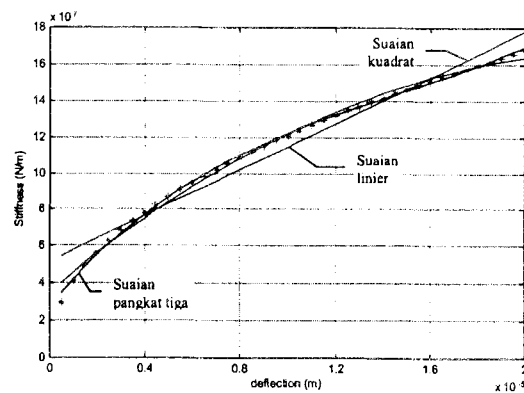
Dari perhitungan kekakuan bantalan diperoleh hubungan antara gaya dan beban seperti pada Gambar 2.



Gambar 2 Kurva gaya terhadap defleksi pada bantalan

Hubungan antara kekakuan dan defleksi dapat diperoleh dengan mendiferensiasikan hubungan gaya-defleksi sehingga didapat kurva kekakuan seperti pada Gambar 3.

Persamaan kurva pada Gambar 3 diperoleh dengan menerapkan suaian polinomial sedemikian rupa sehingga diperoleh kekakuan bantalan seperti pada Tabel 2.



Gambar 3 Kurva kekakuan terhadap defleksi bantalan

Tabel 2 Kekakuan bantalan yang digunakan

Orde polinomial	Kekakuan bantalan
1	$(6.33e12)x+(5.1e7)$
2	$(-2.2e17)x^2+(1.1e13)x+(3.5e7)$
3	$(1.6e22)x^3-(7.2e17)x^2+(1.5e13)x+(2.75e7)$

Persamaan gerak sistem getaran bantalan dapat dirumuskan dengan menghitung *restoring force* yang dapat terbentuk dari persamaan kekakuan bantalan.

**3 Teori volterra untuk sistem non-linier**

Representasi sistem non-linier dalam domain frekuensi umumnya berdasarkan pada model Volterra [9]. Suatu sistem dengan luaran  $y(t)$ , bila ditinjau dari model Volterra, dapat dituliskan sebagai jumlah dari  $N$  buah komponen  $y_n(t)$ :

$$y(t) = \sum_{n=1}^N y_n(t) \tag{2}$$

Luaran orde ke- $n$  didefinisikan sebagai ‘ekspansi integral konvolusi dari sistem linier’ sebagai berikut:

$$y_n(t) = H_n[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n x(t - \tau_i) d\tau_i \tag{3}$$

dengan  $x(t)$  : sinyal masukan sistem.

Persamaan (3) dapat dinyatakan dalam domain frekuensi dengan menerapkan transformasi Fourier dimensi ke- $n$ . Mengingat suku sebelah kiri pada persamaan (3) merupakan fungsi satu dimensi, maka didefinisikan:

$$y_n(t) = y_n(t_1, \dots, t_n) \Big|_{t_1 = \dots = t_n = t} \tag{4}$$

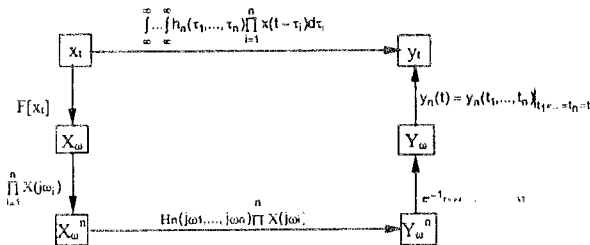
Transformasi Fourier pada persamaan (3) menghasilkan bentuk:

$$Y_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = H_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) \prod_{i=1}^n X(j\omega_i) \tag{5}$$

dengan FRF orde ke- $n$  dinyatakan seperti persamaan (6) berikut ini:

$$H_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \cdot e^{-j(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_n\tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \tag{6}$$

Ilustrasi hubungan antara persamaan-persamaan di atas dapat dilihat pada Gambar 4.



**Gambar 4** Hubungan domain frekuensi dan waktu pada FRF orde-tinggi

**4 Fungsi respons frekuensi non-linier**

**4.1 Metode langsung**

Secara matematis sistem getaran non-linier dapat dituliskan sebagai berikut:

$$m\ddot{x} + c_d\dot{x} + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots = cy(t) \tag{7}$$

dengan  $k_n$  pada kasus ini merupakan koefisien kekakuan bantalan pada orde ke- $n$  yang diperoleh dari pemodelan Lim [5].

Berdasarkan persamaan (2), persamaan gerak untuk getaran non-linier dapat dituliskan kembali:

$$cy(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c^n [m\ddot{x}_n + c\dot{x}_n + k_1x_n] + \sum_{p=2}^N k_p \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c^n x_n(t) \right]^p \tag{8}$$

Setelah diekspansi, persamaan (8) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$cy(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c^n [m\ddot{x}_n + c\dot{x}_n + k_1x_n] + k_2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n2=1}^{\infty} c^{n1+n2} x_{n1}(t)x_{n2}(t) + k_3 \sum_{n1=1}^{\infty} \sum_{n2=1}^{\infty} \sum_{n3=1}^{\infty} c^{n1+n2+n3} x_{n1}(t)x_{n2}(t)x_{n3}(t) + \dots + k_N \sum_{n1=1}^{\infty} \dots \sum_{nN=1}^{\infty} c^{n1+\dots+nN} \prod_{s=1}^N x_{ns}(t)$$

Penyamaan koefisien  $c^n$  pada kesua sisi persamaan untuk masing-masing  $n$  menghasilkan persamaan berikut.

- 1. Persamaan orde pertama

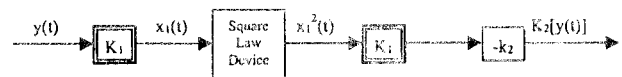
$$K_1 = H_1^{-1} = \frac{1}{k_1 - m\omega^2 + ic_d\omega} \tag{9}$$

$K_1 = \text{first-order FRF}$

- 2. Persamaan orde kedua

$$K_2(s_1, s_2) = -k_2K_1(s_1)K_1(s_2)K_1(s_1 + s_2) \tag{10}$$

Orde kedua FRF ini dapat dinyatakan dalam diagram blok sebagai berikut:



Untuk kasus resonansi diperoleh:

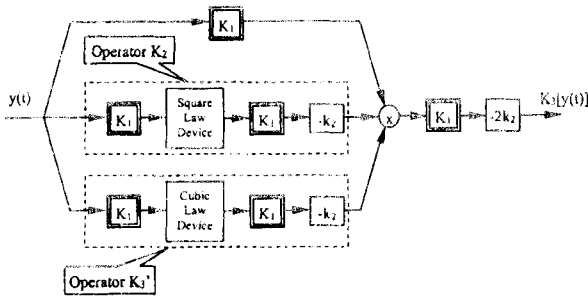
$$K_2(j\omega, j\omega) = -k_2K_1(j\omega)^2 K_1(j2\omega)$$

- 3. Persamaan orde ketiga:

$$K_3(s_1, s_2, s_3) = -K_1(s_1)K_1(s_2)K_1(s_3)$$

$$K_1(s_1 + s_2 + s_3)[2k_2^2 K_1(s_1 + s_2) + k_3] \tag{11}$$

Diagram blok untuk orde ketiga:



Untuk kasus resonansi pada frekuensi eksitasi  $\omega$  maka diperoleh:

$$K_3(j\omega, j\omega, -j\omega) = -K_1(j\omega)^3 K_1(-j\omega)[2k_2^2 K_1(j2\omega) + k_3]$$

Untuk resonansi pada  $3\times$  frekuensi eksitasi diperoleh:

$$K_3(j\omega, j\omega, j\omega) = -K_1(j\omega)^3 K_1(j3\omega)[2k_2^2 K_1(j2\omega) + k_3]$$

Frekuensi respons sistem getaran non-linier dalam penelitian ini dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (8) sampai persamaan (10).

**4.2 Metode Runge-Kutta**

Melalui perumusan seperti yang diuraikan di atas, respons sistem getaran non-linier pada frekuensi eksitasinya dapat dituliskan sebagai berikut [2]:

$$Y(\omega) = XH_1(\omega) + \frac{3}{4} X^3 H_3(\omega, \omega, -\omega) + \frac{5}{8} X^5 H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) + \dots \quad (12a)$$

Berdasarkan persamaan (12a), level respons getaran non-linier pada  $1\times$  frekuensi eksitasi dapat diperoleh dengan menerapkan metode Runge-Kutta pada frekuensi eksitasi tertentu. Jika frekuensi eksitasi yang diterapkan pada metode tersebut diubah secara simultan, respons getaran non-linier sebagai fungsi frekuensi eksitasi  $[Y(\omega)]$  dapat diperoleh sepanjang *span* frekuensi yang diberikan. Selanjutnya, jika level eksitasi ditetapkan sebesar satu satuan, dapat diperoleh fungsi respons frekuensi orde pertama (FRF<sub>1</sub>) yang merupakan perbandingan antara level respons pada  $1\times$  frekuensi eksitasi dengan level gaya eksitasi. Diagram alir untuk perhitungan FRF<sub>1</sub> dapat dilihat pada Gambar (5).

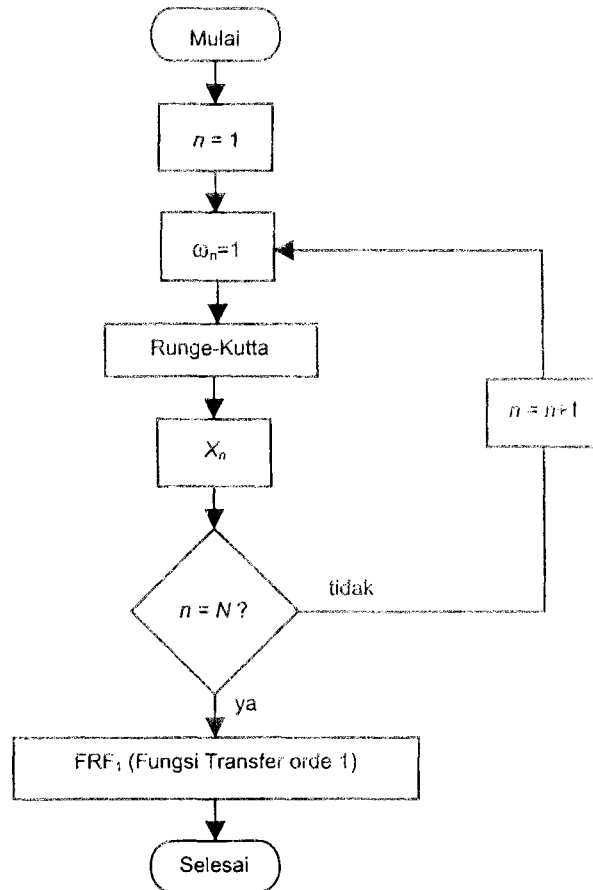
Persamaan (12a) menunjukkan bahwa jika level gaya eksitasi ( $X$ ) cukup kecil, suku kedua dan selanjutnya dapat diabaikan sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$FRF_1 = \frac{Y(\omega)|_{X \ll 1}}{X} \approx H_1(\omega) \quad (12b)$$

Melalui cara yang sama dengan perumusan persamaan (12a), persamaan respons getaran pada frekuensi sebesar  $2\times$  frekuensi eksitasinya dapat diturunkan sebagai berikut:

$$Y(2\omega) = \frac{1}{2} X^2 H_2(\omega, \omega) + \frac{1}{4} X^4 H_4(\omega, \omega, \omega, -\omega) + \dots \quad (13a)$$

Mengingat FRF<sub>2</sub> memiliki persamaan sebagai berikut [10]:



Gambar 5 Diagram alir untuk perhitungan fungsi transfer dengan metode Runge-Kutta

$$FRF_2 = \frac{2Y(j2\omega)}{X(j\omega)^2}$$

untuk level gaya eksitasi yang kecil akan diperoleh:

$$FRF_2 = \frac{2Y(j2\omega)|_{X \ll 1}}{X^2} \approx H_2(\omega, \omega) \quad (13b)$$

**5 Eksitasi getaran yang frekuensinya jamak**

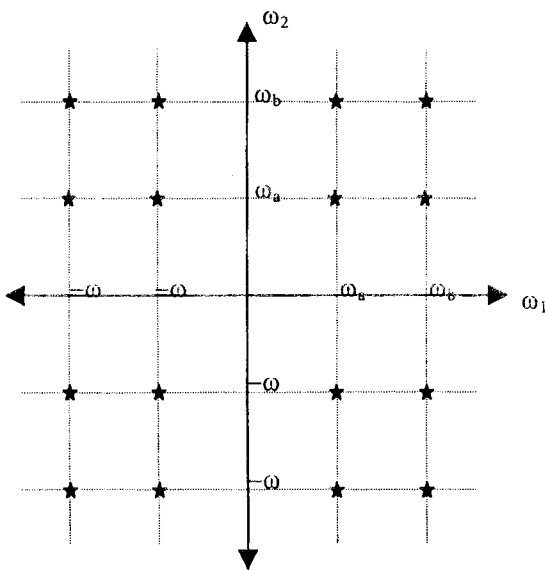
Suatu komponen rotasi, misalnya sistem poros-rotor yang menggunakan bantalan sebagai penumpu poros, dalam keadaan berputar umumnya akan mengalami gaya eksitasi getaran yang frekuensinya banyak. Gaya eksitasi getaran ini biasanya berasal dari sinyal *unbalance* dan *misalignment*. Sinyal eksitasi yang berasal dari *unbalance* dan *misalignment* sudut akan memiliki frekuensi eksitasi sebesar  $1\times$  rpm, sementara *misalignment* paralel akan menyebabkan frekuensi eksitasi  $2\times$  rpm.

Berbeda dengan sistem getaran linier yang hanya menghasilkan respons getaran berupa superposisi dari respons masing-masing sinyal masukannya, sistem getaran non-linier menghasilkan respons getaran pada frekuensi yang merupakan penjumlahan frekuensi eksitasi sinyal masukannya di samping superposisi

respons getaran sinyal masukan tersebut. Sebagai ilustrasi, suatu sistem operator non-linier orde dua akan diberi masukan dua buah sinyal sinusoidal dengan frekuensi yang berbeda seperti terlihat di bawah ini:

$$\begin{aligned}
 y_2 &= H_2[x_a + x_{-a} + x_b + x_{-b}] = \\
 &= H_2[x_a] + H_2[x_{-a}] + H_2[x_b] + H_2[x_{-b}] \\
 &\quad + 2H_2\{x_a, x_{-a}\} + 2H_2\{x_b, x_{-b}\} \\
 &\quad + 2H_2\{x_a, x_{-b}\} + 2H_2\{x_{-a}, x_b\} \\
 &\quad + 2H_2\{x_{-a}, x_{-b}\} + 2H_2\{x_a, x_b\}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Berdasarkan persamaan (14) dapat disimpulkan bahwa selain superposisi dari respons masing-masing masukan, keluaran sistem juga terdiri atas respons pada frekuensi yang merupakan penjumlahan frekuensi masing-masing masukan. Enam suku pertama dalam persamaan (14) merupakan superposisi dari respons masing-masing masukan, sementara empat suku terakhir terlihat sebagai penjumlahan dan selisih dua frekuensi masukan atau intermodulasi frekuensi [11]. Gambar (6) menunjukkan titik-titik eksitasi untuk masukan dua frekuensi pada sistem operasi orde dua.



Gambar 6 Titik-titik eksitasi getaran untuk sinyal masukan dengan dua frekuensi pada operasi orde 2

### 6 Kaji banding metode runge-kutta dan metode langsung

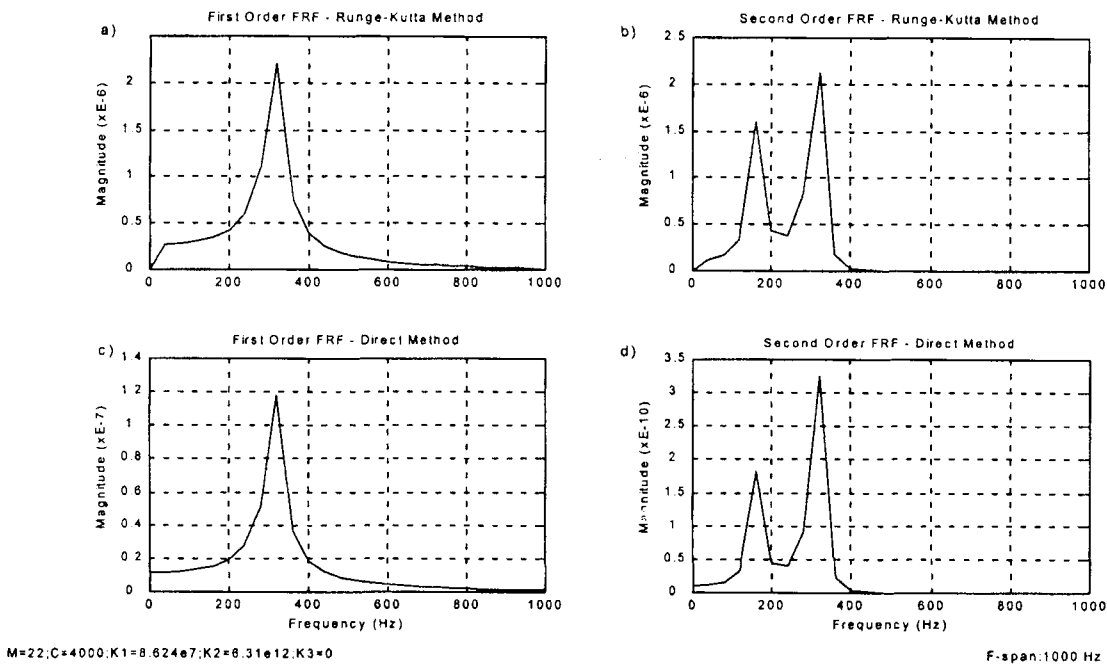
Hasil perhitungan yang diperoleh dengan menggunakan metode Runge-Kutta akan dibandingkan secara kualitatif terhadap metode langsung.

Kekakuan bantalan yang diperoleh melalui metode Lim adalah kekakuan statik berdasarkan geometri bantalan tersebut. Oleh karena itu, massa efektif yang akan digunakan dalam simulasi sistem getaran ini merupakan bagian massa yang dibebankan pada bantalan tersebut.

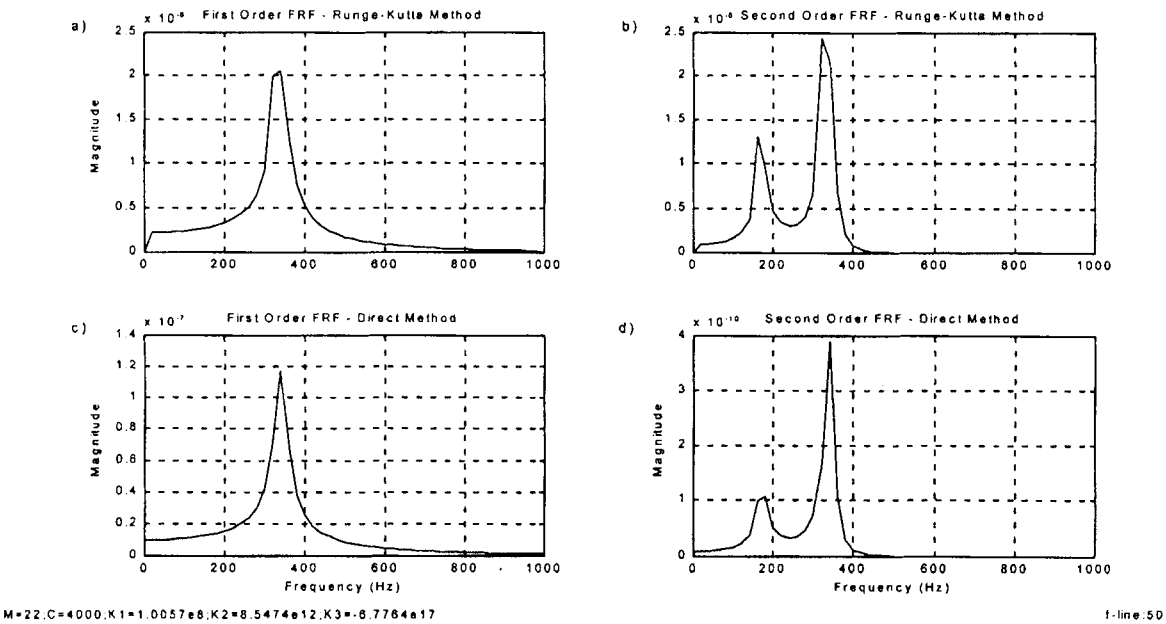
Fungsi respons frekuensi sistem getaran non-linier sebagai hasil kedua metode tersebut dapat dilihat pada Gambar (7). Pada Gambar (7a) dan (7b) terlihat fungsi transfer orde pertama ( $\tilde{H}_1$ ) dan kedua ( $\tilde{H}_2$ ) yang diperoleh melalui metode Runge-Kutta, sedangkan Gambar (7c) dan (7d) memperlihatkan kedua FRF yang diperoleh dengan metode langsung. Kurva-kurva FRF yang tercantum pada Gambar (7) adalah respons frekuensi dari sistem getaran dengan pegas bantalan jika persamaan kekakuan pegas didekati (*fit*) dengan persamaan orde 1 atau linier (*restoring force* akan memiliki persamaan orde dua sehingga disebut sebagai *square stiffness restoring force*).

Gambar (8) memperlihatkan fungsi transfer orde pertama dan kedua yang diperoleh dengan dua jenis metode untuk sistem dengan *cubic stiffness restoring force*.

Secara kualitatif, kedua jenis metode tersebut menunjukkan hasil yang sama. Perbedaan hasil lebih didominasi oleh pembulatan dan galat maksimum pada metode Runge-Kutta. Perhitungan numerik dan pembulatan yang dilakukan pada metode Runge-Kutta ini menyebabkan sinyal masukan seolah-olah telah terdistorsi. Hal ini menyebabkan munculnya frekuensi harmonik yang tidak diinginkan, dan juga resonansi pada 'frekuensi pribadi' sistem untuk eksitasi yang jauh dari 'frekuensi pribadi' tersebut (yang dimaksud 'frekuensi pribadi' dalam hal ini adalah frekuensi pribadi untuk sistem linier dengan kekakuan =  $k_1$ ). Fenomena ini dapat dilihat pada Gambar (9), sedangkan Gambar (10) menunjukkan respons frekuensi untuk eksitasi yang sama dengan menggunakan metode langsung yang memanfaatkan deret Volterra.



Gambar 7 FRF orde 1 dan 2 untuk sistem dengan square stiffness restoring force

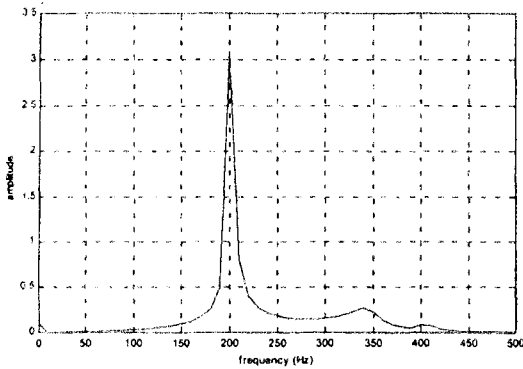


Gambar 8 FRF orde 1 dan 2 untuk sistem dengan cubic stiffness restoring force

Pada Gambar (9) terlihat munculnya resonansi pada frekuensi sekitar 340 Hz saat sistem getaran dengan *cubic stiffness restoring force* (yang memiliki kekakuan  $k_1, k_2$  dan  $k_3$ ) dieksitasi pada frekuensi 200 Hz. Frekuensi 340 Hz pada contoh di atas dekat dengan frekuensi pribadi untuk sistem getaran linier yang memiliki kekakuan sama dengan kekakuan orde pertama ( $k_1$ ) pada sistem dengan *cubic stiffness restoring force*. Pada frekuensi 400 Hz terlihat harmonik kedua dari respons sistem.

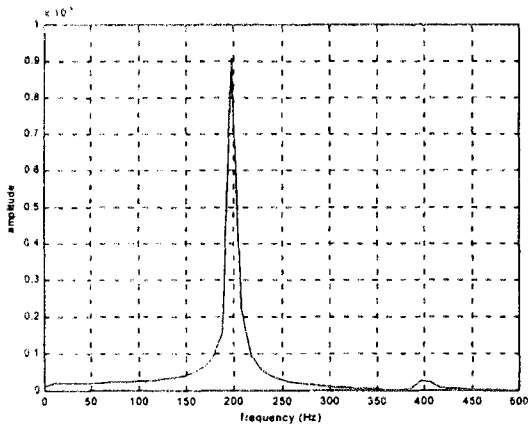
Pada Gambar (10) resonansi pada frekuensi 340 Hz tidak akan muncul karena perhitungan dengan metode langsung tidak mengandung galat maksimum seperti yang terdapat pada kasus sebelumnya.

Perubahan kelonggaran pada bantalan akan menyebabkan karakteristik kekakuan bantalan berubah juga. Secara tidak langsung, perubahan kelonggaran ini akan menyebabkan berubahnya sistem getaran. Pengaruh kelonggaran pada bantalan dapat dilihat pada Gambar (11).



Gambar 9 Kesalahan yang terjadi akibat distorsi sinyal masukan pada metode Runge-Kutta

Dalam gambar ini terlihat pengaruh kelonggaran terhadap respons getaran non-linier dari sistem bantalan jika sistem dieksitasi dengan satu frekuensi tertentu (dalam kasus ini sistem getaran dieksitasi pada 50 Hz). Semakin besar kelonggaran pada bantalan, semakin besar pula nonlinieritas bantalan sehingga respons getaran akan memiliki semakin banyak frekuensi harmonik.



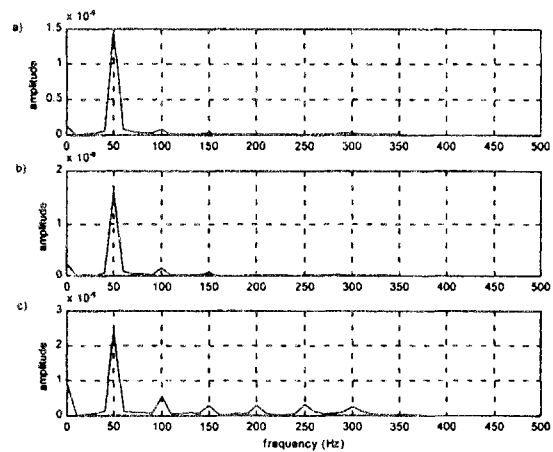
Gambar 10 Respons getaran dengan metode langsung

Perubahan kelonggaran semakin mudah teridentifikasi dari respons getaran dalam domain frekuensi untuk berbagai orde. Gambar (12), (13), dan (14) menunjukkan respons, frekuensi orde pertama, kedua, dan ketiga, masing-masing untuk berbagai variasi kelonggaran. Semakin besar kelonggaran yang terjadi, semakin besar juga nonlinieritas sistem getaran. Hal ini secara jelas ditunjukkan pada Gambar (14) dengan meningkatnya perbandingan magnitude puncak pertama dan puncak kedua terhadap puncak ketiga pada respons frekuensi orde ketiga. Secara matematis, dari persamaan (10) dan (11) dapat diketahui bahwa puncak pertama dan puncak kedua terletak pada frekuensi  $1/3$  dan  $1/2$  dari puncak ketiga.

Selanjutnya, simulasi dilakukan dengan memberikan eksitasi dengan dua frekuensi yang diasumsikan sebagai sinyal *unbalance* dan *misalignment* sudut ( $1 \times \text{rpm}$ ) dengan *misalignment* paralel ( $2 \times \text{rpm}$ ).

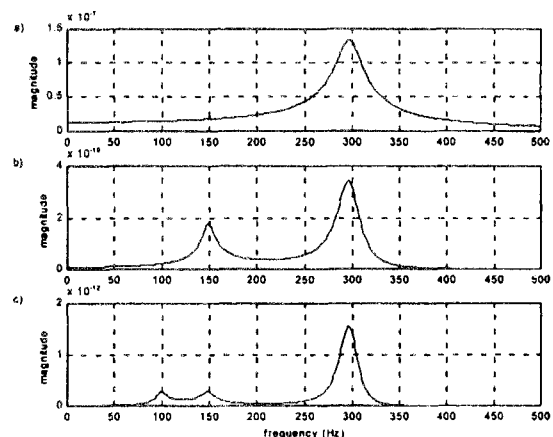
Pada Gambar (15) terlihat respons sistem getaran pada domain waktu (a) dan domain frekuensi (b) untuk eksitasi pada frekuensi 50 Hz. Respons yang terjadi memperlihatkan resonansi pada frekuensi 50 Hz dan juga harmoniknya pada 100 Hz dan 150 Hz.

Gambar (16) menunjukkan respons sistem untuk eksitasi 50 Hz dan 100 Hz. Perbandingan level gaya eksitasi antara kedua eksitasi tersebut secara berturut-turut adalah 2:1 dengan level gaya eksitasi pertama sama dengan level gaya eksitasi pada kasus Gambar (15). Respons yang terjadi menunjukkan resonansi pada frekuensi fundamentalnya, yaitu 50 Hz dan 100 Hz. Adanya fenomena intermodulasi ditunjukkan oleh resonansi yang terjadi pada frekuensi 150 Hz. Jika sistem linier, maka berdasarkan Gambar (15), resonansi pada frekuensi 150 Hz tidak akan memiliki level yang cukup besar. Jadi, level yang besar pada frekuensi 150 Hz terjadi karena fenomena intermodulasi kedua frekuensi dasar tersebut.



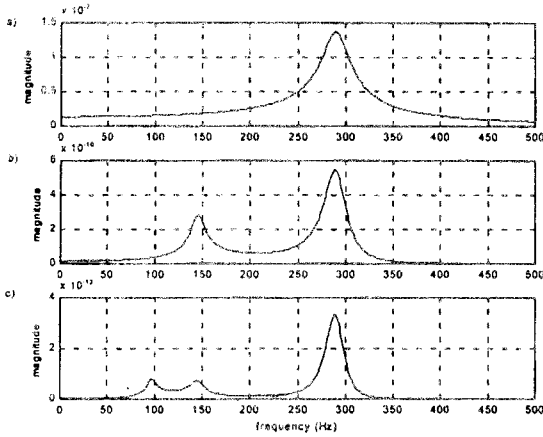
Gambar 11 Pengaruh kelonggaran bantalan terhadap respons getaran

- a) Kelonggaran 13  $\mu\text{m}$
- b) Kelonggaran 20  $\mu\text{m}$
- c) Kelonggaran 30  $\mu\text{m}$



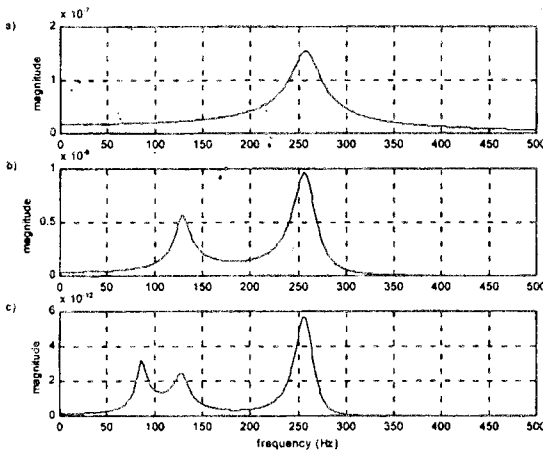
Gambar 12 Respons frekuensi pada bantalan dengan kelonggaran 13  $\mu\text{m}$

- a) Respons frekuensi orde pertama ( $H_1$ )
- b) Respons frekuensi orde kedua ( $H_2$ )
- c) Respons frekuensi orde ketiga ( $H_3$ )



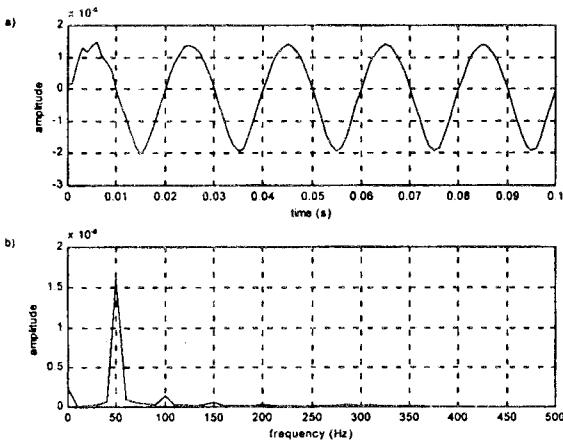
Gambar 13 Respons frekuensi pada bantalan dengan kelonggaran 20  $\mu\text{m}$

- a) Respons frekuensi orde pertama ( $H_1$ )
- b) Respons frekuensi orde kedua ( $H_2$ )
- c) Respons frekuensi orde ketiga ( $H_3$ )

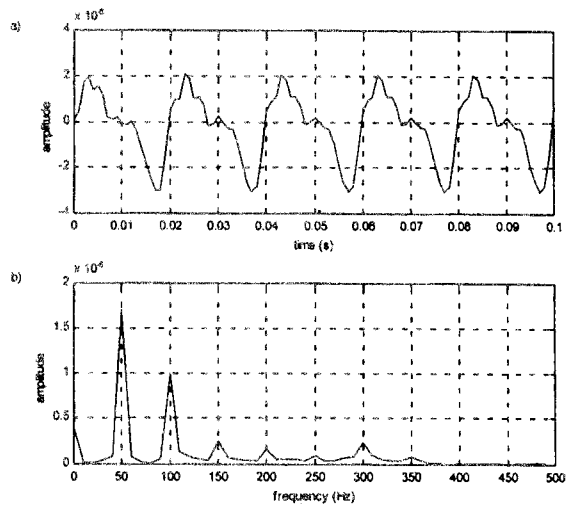


Gambar 14 Respons frekuensi pada bantalan dengan kelonggaran 30  $\mu\text{m}$

- a) Respons frekuensi orde pertama ( $H_1$ )
- b) Respons frekuensi orde kedua ( $H_2$ )
- c) Respons frekuensi orde ketiga ( $H_3$ )



Gambar 15 Respons getaran karena eksitasi tunggal



Gambar 16 Respons getaran karena eksitasi ganda

### 7 Ringkasan

Distorsi respons getaran bantalan cukup besar sebagai akibat nonlinieritas dari kekakuan bantalan. Eksitasi dengan satu frekuensi dapat mengakibatkan munculnya frekuensi harmonik dari respons sistem. Pengaruh eksitasi sistem getaran, misalnya karena *unbalance* dan *misalignment*, akan memainkan peranan penting dalam menentukan respons sistem getaran yang ditumpu oleh bantalan.

Respons frekuensi orde kedua sistem getaran yang digunakan memiliki dua buah komponen frekuensi resonansi dengan frekuensi resonansi pertama merupakan setengah dari frekuensi resonansi kedua. Hal ini dapat dipahami mengingat eksitasi sistem pada frekuensi resonansi pertama (pada FRF orde 2) akan memiliki harmonik kedua pada frekuensi resonansi kedua (pada FRF orde 2) yang sama dengan frekuensi resonansi pertama pada FRF orde 1.

Respons frekuensi orde pertama untuk kedua sistem (*square stiffness restoring force* dan *cubic stiffness restoring force*) tidak menunjukkan perbedaan karena respons ini hanya melibatkan orde pertama komponen kekakuan, yakni  $k_1$ .

Metode langsung terlihat memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan metode Runge-Kutta. Hal ini disebabkan oleh munculnya resonansi di daerah 'frekuensi pribadi sistem linier' karena distorsi sinyal masukan pada metode Runge-Kutta.

Kelonggaran yang terdapat pada bantalan sangat berpengaruh dominan dalam nonlinieritas sistem getaran. Fenomena tersebut terlihat dengan jelas pada respons frekuensi orde tinggi. Pada kasus penelitian ini terlihat pengaruh kelonggaran yang cukup signifikan pada respons frekuensi orde ketiga.

Eksitasi ganda (*two-tone excitation*) karena *unbalance* dan *misalignment* menyebabkan timbulnya efek intermodulasi. Efek intermodulasi ini mengakibatkan respons



getaran akibat gabungan kedua eksitasi tersebut akan cukup besar, meskipun respons getaran akibat salah satu sumber eksitasi *unbalance* atau *misalignment* saja cukup kecil.

## 8 Ucapan terima kasih

Tulisan ini merupakan bagian dari penelitian utama yang berjudul 'Mechanical Signature Analysis of Synchronous and Asynchronous Excited Rotating Rotor Supported by Rolling Element Bearing'. Penelitian tersebut dibiayai oleh Hibah Tim Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Republik Indonesia melalui Graduate Team Research Grant dengan kontrak no. 018/HTPP/II/URGE/1996

## 9 Daftar pustaka

1. Gifford, S.J & G.R., Tomlinson, A Functional series approach in the identification of non-linear structures. *Proc. 5<sup>th</sup> International Modal Analysis Conf.*, London, England (1987)
2. Lee, G.M., Estimation of non-linear system parameters using higher-order frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **11** (1997), 219-228
3. Harris, T.A., *Rolling bearing analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1991
4. White, M.F., Rolling element bearing vibration transfer characteristics: Effect of stiffness. *Journal of Applied Mechanics*, **46**, 677-684 (1979)
5. Lim, T.C. & Singh, R., Vibration transmission through rolling element bearing, Part I: Bearing stiffness formulation. *Journal of Sound and Vibration*, **139**, 179-199 (1990)
6. Iskandar, I.S., *Kaji eksperimental dan analisis teoretik respons getaran sistem poros rotor karena massa tak seimbang dan cacat pada bantalan*, Tugas Sarjana, Jurusan Teknik Mesin ITB, 1997
7. Irwanto, Bagiasna, K., & Abidin, Z., Analisis getaran nonlinear pada sistem poros rotor: Model teoretik dan analisis bantalan Rol. *Proceedings ETM'97*, Bandung, Indonesia 1997
8. Iskandar, I.S., Bagiasna, K., & Abidin, Z., Analisis ciri mekanik spektrum getaran sistem poros rotor yang ditumpu oleh Bantalan Rol. *Proceedings ETM'97*, Bandung, Indonesia 1997
9. Schetzen, M., *The volterra & wiener theories of nonlinear systems*, John Wiley Interscience Publication, New York, 1980
10. Gifford, S.J. & Tomlinson, G.R., An explanation of the cause of the distortion in the transfer function of a duffing oscillator subject to sine excitation. *Proc. 9<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*, Firenze (Florence), Italy, 1991
11. Jones, J.C.P. & Billing, S.A., Interpretation of non-linear frequency response function. *International Journal of Control* **2**, 52, 319-346 (1990)